LAS CONDICIONES COGNITIVAS DEL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA. DESARROLLO DE LA VISUALIZACIÓN, DIFERENCIACIONES DE LOS RAZONAMIENTOS, COORDINACIÓN DE SUS FUNCIONAMIENTOS

Raymond Duval

No descuidar de manera alguna la geometría

República VII, 527c

Entre todos los campos de conocimiento en los que los estudiantes deben entrar, la geometría es el que exige la actividad cognitiva más completa, ya que apela al gesto, al lenguaje y a la mirada. Allí es necesario construir, razonar y ver, indisociablemente. Pero la geometría también es el campo más difícil de enseñar y uno de aquellos en los que, aun cuando los objetivos sean muy modestos, los resultados que se alcanzan son decepcionantes. Es suficiente consultar las evaluaciones nacionales al comienzo de la secundaria, sin necesidad de recordar las dificultades que conciernen a la demostración,[1] para constatar un estado de cosas bien conocido. ¿Qué es lo que en la actividad cognitiva necesaria para hacer geometría, resulta ser demasiado complejo o demasiado inalcanzable para los estudiantes: construir, razonar para justificar, o ver? Detengámonos un instante en las figuras que condensan de alguna manera todas las modalidades de la actividad cognitiva.

Ver una figura en geometría exige disociar lo que corresponde a la magnitud y, por lo tanto, lo que depende de la escala de magnitud con la que se efectúa el acto de ver, de lo que corresponde a las formas distinguidas, que son independientes de la escala de magnitud. La relación con las figuras, es decir, la manera de mirar lo que ellas dejan ver, concierne a la distinción de formas y no a la magnitud o a los cambios de escala de magnitud. El siguiente es el análisis que hacía Poincaré de "la intuición geométrica":

---

1 A través de comunicación personal con el autor, él aclara que, en francés, el término "démonstration" se usa específicamente en las matemáticas, mientras que "preuve" se usa en las otras ciencias. "Démonstration" se refiere al modelo lógico deductivo introducido por Euclides y Aristóteles, y en la actualidad, con frecuencia se está calificando de "preuve formelle". También en el ámbito educativo se están aceptando justificaciones más intuitivas, usándose entonces el término más extenso "preuve". Los términos "démontrer", "prouver" o "montrer" muy a menudo se usan indistintamente. En este artículo hemos traducido los términos "preuve" y "prouver" como "prueba" y "probar", respectivamente, y "démontrer" y "démonstration" como "demostración" y "demostrar". [N. T.]

> Cuando, en un teorema de geometría métrica, se requiere esta intuición, es porque es imposible estudiar las propiedades métricas de una figura haciendo abstracción de sus propiedades cualitativas, es decir, aquellas que son objeto propio del *Análisis Situs* (…) Para favorecer esta intuición, la geometría tiene que dibujar las figuras, o por lo menos representárselas mentalmente. Ahora bien, si se desprecian las propiedades métricas o proyectivas de esas figuras, si se retienen únicamente sus propiedades puramente cualitativas, es allí cuando interviene verdaderamente la intuición geométrica (Poincaré, 1963/1912, pp. 134-135).

La distinción de esas "propiedades puramente cualitativas" constituye el primer umbral crítico para el aprendizaje de la geometría. En la enseñanza, es quizá el umbral que con mayor dificultad se logra hacer pasar a los estudiantes, pero también el más decisivo para hacerles comprender en qué consisten las maneras de trabajar en geometría.

Esta afirmación puede sorprender. En efecto, el reconocimiento de las propiedades "puramente cualitativas" parece directamente arraigado en la percepción. Además, el corpus de las figuras cuyo conocimiento pueden exigir los programas escolares es muy restringido, y corresponde a formas que son perceptivamente notables y culturalmente familiares. En la enseñanza, esas figuras se encuentran en el cruce de caminos de una gran variedad de actividades: observación, reproducción, construcción, descripción, definición, etc. ¿Por qué la fuente profunda de las dificultades que enfrenta la enseñanza de la geometría se debería buscar primero en esta intuición geométrica que se apoya en la percepción, percepción que abarca tanto el espacio del mundo que nos rodea como los diferentes tipos de representación (fotografías, mapas, planos, esquemas, figuras) a los que da lugar?

La percepción es la que causa problemas. No solo funciona sin recurrir a disociación alguna entre magnitud y distinción visual de las formas (Coren, Porac y Ward, 1979), sino que sobre todo impone una manera común de ver que va en contra de dos maneras de ver las figuras que se requieren en la enseñanza de las matemáticas: una, centrada en la construibilidad de las figuras con ayuda de instrumentos, y la otra, centrada en su enriquecimiento heurístico para hacer aparecer formas que no son las que la mirada ve. Y se sabe cuán difícil puede ser, para muchos estudiantes, el paso del funcionamiento habitual de la percepción de las formas (Kaniza, 1998) a estas dos maneras de ver, especialmente a la segunda. Sin embargo, esas dos maneras de ver no son más que la manifestación superficial de una tercera, que constituye el mecanismo cognitivo de la visualización matemática: la deconstrucción dimensional de las formas.

La construcción de figuras o su utilización heurística solo tienen sentido en la medida en que se inscriben en este funcionamiento de la visualización matemática, pues con esta tercera manera de ver, el espacio ya no se aborda desde el aspecto de la magnitud y el cambio de escala de magnitud, ni desde el de las propiedades topológicas y afines que distinguen formas, sino desde el aspecto de sus dimensiones y del cambio del número de estas. El cambio del número de dimensiones está en el centro de la mirada geométrica sobre las figuras.

Pero volvamos a las figuras para las cuales Poincaré reconocía la necesidad cognitiva de "intuición geométrica". Su principal característica, en relación con otras representaciones del espacio que nos rodea, como planos, mapas o modelos, es no ser icónicas, es decir, no parecerse a un objeto visto y conocido en la realidad. Esto quiere decir que el reconocimiento de los objetos representados no depende principalmente de la distinción visual de las formas, sino de hipótesis que se dan y que van a ordenar *también* la mirada sobre las figuras. Y este es un tipo muy diferente de actividad movilizada: la producción discursiva de enunciados relacionados entre sí para justificar, explicar, demostrar. ¿Es necesario recordar que esto no se puede hacer por fuera del lenguaje, pero que, al igual que para la visualización, el lenguaje no se hace funcionar de la misma manera en que se utiliza fuera de las matemáticas?

Son esas condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría las que vamos a analizar en detalle en este artículo. Mostraremos, más particularmente, que la visualización y la producción de enunciados en geometría requieren funcionamientos cognitivos que son diferentes y más complejos que los que se aplican fuera de la geometría. Por eso, su desarrollo y su coordinación se deben considerar como objetivos de enseñanza tan esenciales como los contenidos matemáticos mismos. Porque aquí la comprensión de los contenidos solo se puede construir a partir de una sinergia entre visualización y lenguaje. Esas condiciones cognitivas son, en cierto modo, condiciones para aprender a aprender en geometría.

Comenzaremos explicitando la especificidad de las maneras de ver que se practican en matemáticas. Para eso vamos a partir de una idea muy simple: es la tarea propuesta la que determina la relación con las figuras. La manera de ver una figura depende de la actividad en la que sea movilizada. Esto nos permitirá plantear una pregunta esencial para la organización de los aprendizajes, y que raramente se tiene en cuenta: la manera de ver que un tipo de actividad favorece, ¿ayuda a entrar en las otras maneras de ver requeridas por los otros tipos de actividad? Abordaremos luego lo que constituye el proceso central de la visualización geométrica: la deconstrucción dimensional de las formas.

Ninguna de las actividades que se utilizan clásicamente para iniciar a los estudiantes en el estudio de la geometría permite verdaderamente desarrollar esta manera de ver. Sin embargo, es la única requerida para comprender las diferentes maneras de utilizar el lenguaje natural en geometría: enunciación de propiedades, definiciones, deducción de otras propiedades, teoremas… Iniciar en esto a los estudiantes exige un tipo de actividad muy diferente de las que habitualmente se utilizan. Pero, más allá de su aplicación didáctica, lo que examinaremos es el problema más global de la articulación entre visualización y discurso geométrico. En efecto, allí es donde se sitúan no solamente los retos educativos de la geometría, retos de formación general como Platón los evocaba ya, sino también los retos científicos, puesto que conciernen a las maneras matemáticas de probar.

Clasificación de las maneras de ver en función del papel de las figuras en las actividades geométricas propuestas a los estudiantes

El abanico de actividades que se pueden proponer a los estudiantes para que trabajen con figuras o sobre ellas es supremamente amplio. Las variaciones de actividad se refieren a la vez a la *tarea que se va a realizar* (reproducir una figura según un modelo, o construirla, o tomar medidas, o describirla para que otro estudiante la construya) y a la *modalidad de actividad pedida* (modalidad concreta utilizando material manipulable, modalidad de representación limitándose únicamente a las producciones gráficas, o modalidad técnica imponiendo ciertos instrumentos). Ahora bien, de ningún modo se pide que las maneras de ver sean las mismas de un tipo de actividad a otro, incluso si son las mismas formas nD (piezas materiales 3D para manipular físicamente, figuras 2D ya construidas o que se pide construir para modificarlas…) las que se dan perceptivamente para ser vistas. Tomando simplemente como criterios el tipo de operaciones sobre las formas dadas para ser vistas y la manera como las propiedades geométricas se movilizan en relación con ese tipo de operaciones, podemos distinguir cuatro maneras de ver. Estas cuatro maneras de ver son cuatro entradas muy diferentes a la geometría.

	BOTÁNICO	AGRIMENSOR geómetra	CONSTRUCTOR	INVENTOR artesano
1. Tipo de operación sobre las FORMAS VISUALES, requerida por la actividad propuesta	Reconocer formas a partir de cualidades visuales de un contorno: se privilegia UNA forma particular como TÍPICA	Medir los bordes de una superficie: sobre un TERRENO o sobre un DIBUJO (variación de escala de magnitud y, por tanto, de procedimiento de medición)	Descomponer una forma en trazos construibles con ayuda de un instrumento. Hay que pasar (a menudo) por TRAZADOS AUXILIARES que no pertenecen a la figura “final”	Transformar unas formas en otras. Hay que agregar TRAZOS REORGANIZADORES en la figura final para inicializar esas transformaciones
2. Cómo se movilizan las PROPIEDADES GEOMÉTRICAS con respecto al tipo de operación	No hay relaciones entre las diferentes propiedades (no hay definición matemática posible)	Las propiedades son criterios de selección para las mediciones que se deben hacer. Solo son útiles si remiten a una fórmula que permita un cálculo	Como restricciones de un orden de construcción. Ciertas propiedades se obtienen mediante una sola operación de trazado, las otras exigen varias operaciones	Implícitamente mediante remisión a una red más compleja (una trama de rectas para la geometría plana o una trama de intersecciones de planos…) que la figura de partida

Figura 1. Cuatro entradas clásicas a la geometría

El botánico. Es la entrada más evidente y más inmediata. Se trata de aprender a reconocer y a nombrar las formas elementales que se utilizan en geometría plana: tipos de triángulos y de cuadriláteros, configuraciones obtenidas por las diferentes posiciones relativas de dos rectas, eventualmente las formas circulares y las ovaladas, etc. Se trata de observar las diferencias entre dos formas que presentan ciertas semejanzas (un cuadrado y un rectángulo) y de notar semejanzas entre dos formas diferentes (un cuadrado y un paralelogramo). Aquí, las propiedades distinguidas son características visuales de contorno.

En realidad ese tipo de actividad no es en absoluto una actividad geométrica. Solo parece geométrica en la medida en que se refiere a formas llamadas "euclidianas". Pero el mismo trabajo de observación podría (y debería) hacerse sobre hojas de árboles. Entre todos los modelos de formas planas que Piaget (1972/1947, p. 70) pidió "copiar" a niños de dos a siete años, se habría podido igualmente introducir una hoja de plátano y una de castaño, la forma de un pino y la de un abeto del norte, o el dibujo esquemático de un automóvil. Recordemos que en las observaciones de Piaget se trataba de copiar "a mano alzada" sin utilizar ningún instrumento, ¡ni siquiera una regla!

El agrimensor geómetra. Esta es la entrada histórica. Se trata de aprender a medir longitudes en un *terreno*, del suelo, o las distancias entre dos puntos de referencia, y anotarlas sobre un *dibujo* que toma estatus de plano. *Nos situamos de entrada en dos escalas de magnitud que se van a poner en correspondencia*. Esta puesta en correspondencia no tiene nada de natural o evidente, pues no existe un procedimiento común para medir las distancias reales sobre el terreno y los segmentos trazados en un dibujo. Las tareas específicas de esta entrada consistirán en proponer actividades que exigen pasar de una escala de magnitud a otra. El problema del vidriero es un ejemplo típico (Berthelot y Salin, 1994, pp. 40-41): Para fabricar una ventana que se ajuste a un hueco cuya forma es la de un paralelogramo, ¿cuántas mediciones tomar y cuáles? La medición del radio de la tierra realizada por Eratóstenes es otro ejemplo célebre.

Este tipo de actividad muestra las dificultades que muchos estudiantes enfrentan para poner en correspondencia lo que ven en el terreno y lo que está dibujado en el papel. Esta puesta en correspondencia exige que se privilegien aspectos que son esenciales para la lectura de un plano o la de un mapa geográfico (Berthelot y Salin, 2000): la selección de objetos de referencia, la selección de puntos o ejes de referencia para representar la posición relativa de los objetos, el tomar en cuenta direcciones u orientaciones… Estos aspectos no siempre son pertinentes para la representación geométrica. Además, en ese tipo de actividad *las propiedades geométricas se movilizan con fines de medición*.

El constructor. Esta es la entrada necesaria. La particularidad de las figuras geométricas, por lo menos de aquellas que corresponden a formas euclidianas elementales y a configuraciones de formas elementales, es *ser construibles con ayuda de instrumentos*. Las figuras geométricas no se dibujan a mano alzada, se construyen con ayuda de un instrumento que guía el movimiento de la mano, o que la reemplaza. ¿Por qué? Un instrumento permite producir una forma visual que tiene una propiedad geométrica y esta forma visual constituye la primitiva del instrumento, a causa de la regularidad que impone al movimiento de trazado y, por lo tanto, *de la invariancia visual que introduce en el trazado*. Por ejemplo, el trazo recto o redondo regular, para los instrumentos clásicos como la regla (no graduada) y el compás. Sin utilizar instrumentos sería imposible verificar una propiedad sobre una figura.

Es mediante la utilización de un instrumento como los estudiantes pueden percatarse realmente de que las propiedades geométricas no son solo características perceptivas. En efecto, la utilización de un instrumento da la posibilidad de experimentar, de alguna manera, las propiedades geométricas como restricciones de construcción: cuando una forma visual no es producida directamente por un instrumento, son necesarias varias operaciones de trazado para obtenerla y hay un orden para esas operaciones. La construcción es imposible si no se tiene en cuenta esto. Por supuesto, todo cambio de instrumento implica un cambio en las propiedades geométricas que se deben movilizar explícitamente.

Es esta entrada la que ha producido innovaciones espectaculares para la enseñanza de la geometría en el curso de estos últimos veinte años (Laborde, 1994). Se han desarrollado los programas informáticos de construcción. Su ventaja, además de la considerable ejecución automática de las tareas de realización como en las calculadoras, consiste en suprimir completamente las aproximaciones compensadoras de la mano en la utilización de instrumentos. Dicho de otra manera, ya no es posible realizar una construcción "aceptable" sin tomar en cuenta las propiedades geométricas. Así, en Cabri Géomètre, una figura construida debe poder conservar su configuración al desplazar alguno de sus puntos.

El inventor artesano. Para presentar esta cuarta entrada es suficiente evocar los problemas clásicos del siguiente tipo:

1) ¿Cómo dividir, de un solo tijeretazo, un triángulo de manera que se pueda hacer un paralelogramo con los dos pedazos?

2) ¿Cómo construir, a partir de un cuadrado dado, otro cuadrado dos veces más grande (cuya área sea el doble)? (Este problema se puede dar sobre papel cuadriculado, lo que reduce las operaciones de medición a un simple conteo de cuadrados.)

Esos problemas tienen en común la exigencia de una deconstrucción visual de las formas perceptivas elementales que se imponen a primera vista, para poder obtener la reconfiguración, o la figura, pedida. Estos problemas tocan una capacidad fundamental que es la condición necesaria para toda utilización heurística de las figuras: añadir trazados suplementarios a una figura de partida (es decir, la que acompaña al enunciado de un problema o se puede construir a partir del enunciado de un problema) con el fin de descubrir sobre la figura un procedimiento de solución. Estos son trazados suplementarios que van a permitir una reorganización visual de la figura de partida. Aquí, es la investigación de ese trazado suplementario la que constituye el problema: "¿Cómo dividir, de un solo tijeretazo,…?".

	BOTÁNICO	**AGRIMENSOR geómetra**	**CONSTRUCTOR**	**INVENTOR artesano**
ESTATUS EPISTEMOLÓGICO	CONSTATACIÓN perceptiva inmediata: "eso se ve sobre..."	CONSTATACIÓN que resulta de la lectura de un instrumento de medición	RESULTADO de un procedimiento de construcción	RESULTADO de una descomposición de la figura de partida en unidades figurales que se reconfiguran de manera diferente
FUENTE COGNITIVA DE LA CERTIDUMBRE	Superposición efectuada a ojo o utilizando una plantilla	Comparación de los valores numéricos obtenidos empíricamente	Necesidad interna en el encadenamiento de las operaciones del procedimiento de construcción	Invariancia de las unidades figurales que son los referentes de la transformación de la figura de partida

Figura 2. Modo de comprensión y de conocimiento relacionado con cada manera de ver

Pasar de una manera de ver a otra constituye un cambio profundo de mirada que, con mucha frecuencia, se desatiende en la enseñanza. El funcionamiento cognitivo implicado por cada una de esas cuatro maneras de ver no es el mismo, como lo mostraremos más adelante. Pero podemos subrayar que cada manera de ver induce un tipo particular y limitado de comprensión. El conocimiento desarrollado no es el mismo según la mirada que un estudiante esté o no en capacidad de movilizar en presencia de la misma figura.

La diversidad de esas maneras de ver plantea preguntas cruciales para la enseñanza de la geometría y para la organización de las situaciones de aprendizaje.

1) ¿La práctica de una actividad favorece la adquisición de maneras de ver relacionadas con los otros tipos de actividad? Por ejemplo, ¿privilegiar las actividades de construcción implica el desarrollo de la capacidad heurística para enriquecer y reorganizar las figuras?

   Esta pregunta de la transferencia, esencial en los aprendizajes, se puede ampliar:

1bis) ¿Habría un orden y, por lo tanto, una jerarquía que respetar, para introducir las actividades propias de esas cuatro entradas? Por ejemplo, ¿el enfoque botánico se puede considerar como la primera etapa necesaria para toda adquisición de conocimientos geométricos?

2) La utilización del lenguaje en geometría (para formular definiciones y teoremas, para aplicarlos en un razonamiento, para formular o explicar una conjetura…), ¿qué manera de ver requiere? ¿Una de las cuatro maneras de ver mencionadas antes, o una quinta totalmente diferente?

Esta pregunta nos remite a la pregunta fundamental tanto desde un punto de vista cognitivo como desde uno epistemológico:

2bis) ¿Cómo, y hasta dónde, "ver" y "enunciar" pueden converger en geometría?

Estas preguntas son cruciales porque tanto el predominio dado a una de las cuatro entradas, como el desconocimiento de la complejidad de la articulación entre ver y decir, pueden crear obstáculos que, a mediano o largo plazo, serán insuperables para el progreso de los estudiantes. Sin embargo, rara vez se plantean esas preguntas porque la respuesta "sí" se considera evidente para la primera, tomada en su formulación estricta o en su formulación amplia. En cuanto a la segunda pregunta, puede parecer muy extraña. No obstante, esta pregunta toca el nudo de todas las dificultades que enfrenta la enseñanza de la geometría de manera profunda y recurrente.

Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la visualización no icónica

Recordemos, ante todo, la complejidad de los procesos que están en juego en el acto de "ver". Ver abarca siempre dos niveles de operaciones que son diferentes y mutuamente independientes, incluso si a menudo se funden en la sinergia de un mismo acto. Esos dos niveles de operaciones son: el *reconocimiento distintivo de formas* y la *identificación de los objetos que corresponden a las formas reconocidas*. El mayor problema cognitivo es saber cómo se hace el paso de un reconocimiento distintivo de formas a la identificación de los objetos que se presentan a la vista.

En la percepción del mundo que nos rodea, esos dos niveles de operación no parecen disociables porque son simultáneos (por lo menos en la escala de nuestra conciencia), pues el objeto se da junto con la forma que permite distinguirlo. Esta fusión entre reconocimiento de una forma e identificación de un objeto, base de toda evidencia perceptiva, es la condición para respuestas rápidas y adaptadas a situaciones nuevas e imprevistas. En cambio, no sucede lo mismo para la percepción de las representaciones construidas por producción de trazados. No hay relación intrínseca alguna entre las formas reconocidas en un trazado y el objeto que ese trazado "quiere" representar. Entonces ¿cómo se puede efectuar el paso de uno al otro?

El paso descansa en un "parecido" entre la forma visual distinta y la forma típica del objeto representado. Este parecido se considera generalmente como constitutivo de la imagen. Por ejemplo, Peirce (1978) lo planteó como característico de todas las representaciones icónicas en oposición a los símbolos y a los índices. Por lo general, este parecido basta para reconocer directa e inmediatamente el objeto representado, como en la percepción del mundo circundante. Por ejemplo, no hay necesidad de saber leer para mirar historietas y seguir el relato.

Naturalmente, ese mecanismo cognitivo de iconicidad no siempre es suficiente. A veces es necesario recurrir a una **enunciación** implícita o explícita. En otros términos, a veces es necesario un aporte verbal de informaciones, integrado a la imagen como leyenda o como codificación de un elemento figurativo, para poder identificar lo que las formas distinguidas representan. *Pero ese papel auxiliar de la enunciación no debe hacernos olvidar la importancia del mecanismo de iconicidad.* Este mecanismo sigue imponiéndose de manera autónoma cada vez que algo (dibujo, figuras o formas de piezas que se manipulan) se presenta a la vista.

VISUALIZACIÓN ICÓNICA Se parece al perfil de un objeto real, o a un conjunto de itinerarios o de desplazamientos sobre un territorio o a un modelo tipo (patrón). *La figura sigue siendo un objeto independiente de las operaciones que se realicen sobre ella.*		**VISUALIZACIÓN NO ICÓNICA** Es una secuencia de operaciones que permite reconocer propiedades geométricas, mediante la imposibilidad de obtener ciertas configuraciones, o por invariancia de las configuraciones obtenidas. *La figura es una configuración contextualmente destacada de una red o de una organización más compleja.*	
BOTÁNICO	**AGRIMENSOR GEÓMETRA**	**CONSTRUCTOR**	**INVENTOR ARTESANO**

Figura 3. Dos mecanismos de identificación de objetos a partir de formas visuales

Miremos ahora cómo se da ese paso para las diferentes maneras de ver que se piden en las actividades de geometría. Para las dos primeras, se hace mediante el mecanismo de iconicidad, como para cualquier representación visual fuera de la geometría. Las otras dos, por el contrario, requieren la neutralización de este mecanismo de iconicidad. Pero no hay que creer que el paso esté garantizado por un aporte verbal de informaciones. La identificación visual de los objetos se hace a partir de las imposibilidades y de las invariancias que una secuencia de transformaciones visuales, efectuadas con o sin instrumento, permite descubrir. Esto se da porque toda figura es generativa de otra, ya sea por extensión de su procedimiento de construcción o por reorganización visual de las formas inmediatamente reconocidas. Ese proceso es intrínsecamente autónomo, aunque al resolver un problema se puede controlar discursivamente para alcanzar un objetivo y, por tanto, se puede restringir considerablemente. Es la aprehensión operatoria fundada sobre este proceso la que produce la fecundidad intuitiva de las figuras.

Los obstáculos de la visualización icónica para el aprendizaje de la geometría

La visualización icónica descansa en un parecido entre la forma reconocida en un trazado y la forma característica del objeto que se va a identificar. Naturalmente, la situación no es la misma según si el referente es un objeto material en el espacio circundante[2] o una representación de su forma tipo. En el caso de la representación, la visualización icónica supone el conocimiento de una forma tipo para cada objeto geométrico que se ha de identificar. La comparación entre las formas a reconocer y las formas tipo tolera desvíos más o menos grandes. Por ejemplo, hay una forma tipo del rectángulo que excluye una desproporción demasiado grande entre largo y ancho. Asimismo, la forma tipo de un triángulo requiere que las alturas estén situadas en su interior. Cada forma tipo está asociada a un nombre que permite evocarla y que le confiere el estatus de objeto. Los obstáculos de la visualización icónica para el aprendizaje de la geometría son bien conocidos.

El reconocimiento está centrado sobre el contorno de una zona o de una superficie, *una forma es ante todo un perfil*. Eso quiere decir que todas las propiedades que no están directamente relacionadas con el contorno característico de una forma (por ejemplo, las propiedades relacionadas con las diagonales de los cuadriláteros notables) quedan fuera del campo y, por tanto, son menos fácilmente movilizables cuando los enunciados de problemas no las mencionan de manera explícita. Eso quiere decir también que hay una resistencia a salir del contorno cerrado de la figura, prolongando, por ejemplo, los lados para hacer aparecer las rectas subyacentes.

Las formas parecen ser *estables*. No se ven de una manera que permita transformarlas en otras formas parecidas; menos aún, en formas diferentes. Por

2 Cuando el referente es el espacio físico circundante o los objetos materiales, el establecimiento de las correspondencias entre las formas reconocidas en un trazado y el referente real implica la movilización del cuerpo de quien mira (su posición, su orientación, sus desplazamientos o sus gestos para manipular). Los mapas, los planos urbanos, los esquemas que acompañan instrucciones de montaje son un excelente ejemplo de esto (Duval, 2000a).

ejemplo, es difícil percibir una superposición de paralelogramos en una red de rectas en la que está destacada una yuxtaposición de triángulos. Esto podría ser más difícil cuando el reconocimiento de las formas se acompaña de la enunciación, implícita o explícita, del nombre de lo que se identifica.

La disociación entre las operaciones que constituyen el acto de ver es aún más necesaria cuando puede haber *conflicto entre el reconocimiento de las formas por simple parecido a un ejemplo tipo y la identificación del objeto al cual corresponde la forma reconocida*. Por ello, las relaciones constitutivas de los objetos no son propiedades cuya presencia se pueda decidir a simple ojo. Para las relaciones entre dos unidades figurales, la visión solo permite una estimación perceptiva sujeta a ilusión y con umbrales estrechos de discernibilidad.

Esas tendencias obstaculizantes de la visualización icónica van en contra del desarrollo de lo que se debería convertir en el gesto reflejo para poder hacer geometría: descomponer toda forma, que se reconoce de entrada en un conjunto de trazados o en cualquier figura de partida, en una configuración de otras unidades figurales del mismo número de dimensiones o de uno inferior.

La visualización no icónica o la deconstrucción de formas

La descomposición de formas distinguidas, comenzando por las que parecen ser visualmente simples, en unidades figurales es el paso previo a la entrada en el funcionamiento propio de la visualización no icónica. El punto esencial es que existen por lo menos dos maneras radicalmente diferentes de descomponer una figura de partida en unidades figurales. Para distinguirlas es suficiente tomar como criterio la práctica, específicamente matemática, de introducir trazados suplementarios como parte de la manera de utilizar una figura de partida (dada con el enunciado o construible a partir de él). Encontramos tal práctica en los dos modos de visualización no icónica que hemos distinguido, pero ella interviene de manera radicalmente diferente. En un caso está impuesta y producida por los instrumentos usados para construir una figura. En el otro, por el contrario, quien mira debe "imaginársela", pues la elección del trazado suplementario permite ver un procedimiento de resolución del problema planteado. Esto remite a dos tipos de funcionamiento cognitivo que no tienen nada en común.

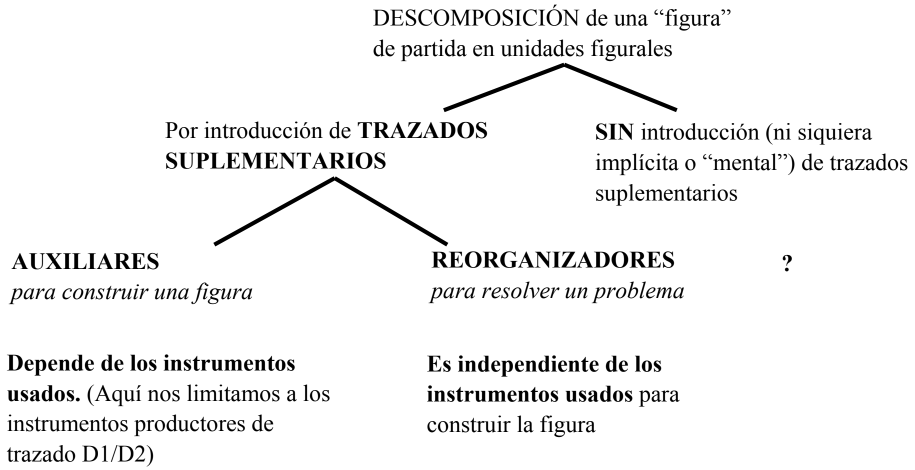


Figura 4. ¿Dos o tres modos de visualización no icónica?

La característica de las figuras geométricas, con respecto a todos los otros tipos de figura, consiste en que se pueden construir con ayuda de instrumentos y principalmente de instrumentos productores de trazados D1/D2.[3] La producción de cada trazado corresponde a la vez a una instrucción formulable (las "figuras telefoneadas") o formulada (en el menú de un programa) y a la movilización de una propiedad geométrica en relación con el instrumento usado (compás, regla no graduada, regla graduada…). Dicho de otra manera, la actividad de construcción de figuras, casi siempre de configuraciones de formas 2D/2D o 3D/2D, se basa en su deconstrucción en trazados 1D/2D y 0D/2D. Pero en esta actividad de deconstrucción toda la atención se centra en la reconstrucción, pues el instrumento realiza de manera automática la deconstrucción de las formas 2D/2D, mientras que la reconstrucción exige que uno se focalice en el orden de las instrucciones que hay que dar para las operaciones de trazado.

Ahora bien, esta actividad conduce a la producción de trazados que no pertenecen a la figura que se va a construir, ya sea porque se trata de trazos

3 El "denominador" corresponde a tener en cuenta el espacio en el que se producen las representaciones:

El de los objetos físicos que se pueden manipular físicamente (nD/3D): maquetas de poliedros (3D/3D), hoja de papel que se puede doblar o cortar (2D/3D), cuerdas que se pueden estirar (1D/3D) como en un geoplano. Yo denominaría a estos objetos "objetos maqueta" para distinguirlos de los instrumentos que producen un trazo o un trazado.

El de un soporte de proyección (nD/2D) para la representación que se va a producir por trazados o por impresiones: arena, papel, pantalla electrónica.

Esto permite distinguir las actividades geométricas que se realizan *materialmente* de las que se realizan *representativamente*. Con frecuencia, los objetos maqueta se utilizan para una interpretación icónica de las representaciones gráficas. Esto aparece también en las definiciones: la recta como una cuerda tensa… Y eso esteriliza la apertura de la representación.

intermediarios o de trazos que van a salir del contorno de las formas trazadas: por ejemplo, las rectas que son soporte de los lados del cuadrado o del triángulo a construir. Llamaremos "trazos auxiliares" a los trazos intermediarios o de soporte. Además, en un entorno de papel y lápiz, con frecuencia se observa la costumbre desastrosa de borrar los trazos auxiliares tan pronto como se obtiene la figura que se iba a construir.

La situación es totalmente diferente cuando se trata de partir de una figura para resolver un problema. El problema de división de un triángulo de un solo tijeretazo de manera que puedan reunirse los dos pedazos en un paralelogramo es un ejemplo típico. Se trata de transformar un triángulo en un paralelogramo agregando un trazado suplementario. Se trata, pues, de la deconstrucción de una forma visual de base para obtener otra forma visual de base. Y la elección de ese trazado suplementario va a depender de la manera como las dos partes del triángulo obtenidas por ese trazado permitan reensamblarlas bajo la forma de un paralelogramo.

Se trata evidentemente de una deconstrucción que no tiene relación con la deconstrucción implicada en la construcción de las figuras. Esto se debe a que la elección de ese trazado es independiente de la manera de construir el triángulo y no hay nada en común entre este trazado suplementario que se debe encontrar y los trazados auxiliares. Llamaremos "trazados reorganizadores" a todos los trazados que permiten reorganizar una figura dada para hacer aparecer formas no reconocibles en ella. La utilización heurística de una figura depende evidentemente de la capacidad de "ver" los trazados reorganizadores posibles.

Hay que subrayar aquí un punto fundamental para comprender la importancia y la especificidad del acto de ver en el aprendizaje de la geometría: *la visualización no icónica es totalmente independiente de toda enunciación explícita o implícita.* En otros términos, no está en absoluto subordinada a un conocimiento de propiedades geométricas. Esto parece trivial para las actividades del tipo construcción de figuras, en la medida en que son los instrumentos utilizados los que dirigen o controlan la descomposición visual de las formas. Por el contrario, no es tan evidente para la utilización heurística de las figuras. Además, muy a menudo, se le asigna un papel director al conocimiento de las propiedades para la exploración de las figuras, como si ver no pudiera permitir el descubrir antes de saber.

Por ejemplo, ¿es necesario realmente conocer el teorema de los puntos medios para resolver el problema de la reconfiguración del triángulo en un paralelogramo o, por el contrario, una exploración de las reconfiguraciones podría ser una estrategia de solución? Y en ese caso, ¿no se necesitarían aprendizajes específicos para que los estudiantes fueran capaces de "ver" el trazado reorganizador, no solamente para este problema, sino para muchos otros problemas matemáticos muy diferentes?

Volveremos sobre esta pregunta que toca el papel heurístico de la visualización en la resolución de problemas de geometría elemental. Pero desde ya podemos hacer las siguientes observaciones: aunque se pueda modificar siempre el discurso sobre los objetos, no es posible modificar las formas que se reconocen de un solo golpe de vista en una figura. Esto se debe a que, a diferencia de la enunciación y, por lo tanto, de la producción de explicaciones o de justificaciones, el reconocimiento visual de formas escapa a todo control intencional.

Existen leyes de organización de los datos visuales, puestas en evidencia por la teoría de la Gestalt, que imponen el reconocimiento de ciertas formas frente al reconocimiento de otras formas, incluso si estas últimas se evocan verbalmente. Esta resistencia ha conducido a algunas investigaciones didácticas a deplorar que en la resolución de problemas de geometría ¡los estudiantes observados se enredan en la "percepción" de la figura! De hecho, un aprendizaje que procura que los estudiantes puedan "ver" uno o más trazados reorganizadores que es necesario añadir para encontrar la solución de un problema se debe hacer en el nivel del reconocimiento de las formas, y no en el de la identificación de los objetos representados, que seguirá siendo puramente verbal.

¿Las adquisiciones relativas a una manera de ver ayudan a entrar en las otras maneras de ver?

Esta pregunta sobre la transferencia de lo que se ha adquirido en un tipo de actividad propuesta en clase a otro tipo de actividad es la pregunta crucial para la enseñanza de la geometría en primaria y a comienzos de secundaria. Querer privilegiar una entrada como más accesible que las otras lleva a suponer la transferibilidad, más o menos espontánea, de una manera de ver a otras.

Pasar de la visualización icónica, que es común a todos los campos de conocimiento, a la visualización no icónica, que es específica de las matemáticas, exige un cambio completo del funcionamiento cognitivo del acto de "ver". Esto equivale a sustituir al circuito espontáneo representado por las flechas A1-A2 (Figura 5), ya sea por el circuito C1-C2, correspondiente a la exploración reorganizadora de las figuras, o por el circuito inverso representado por las flechas B1-B2-B3, considerado como proceso "de conceptualización".

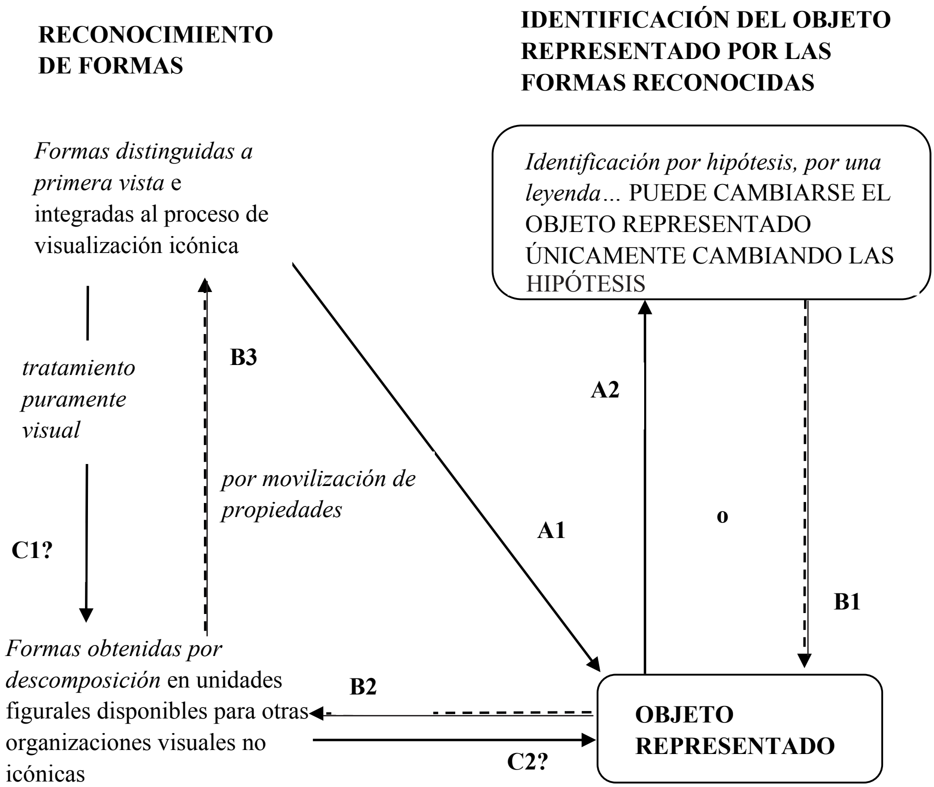


Figura 5. Dos modos de funcionamiento cognitivo para identificar los objetos representados

¿Se puede enseñar la geometría como si la gran mayoría de estudiantes de primaria y de secundaria fueran a descubrir y a realizar por sí mismos ese gran cambio, no solamente para pasar de una visualización icónica a una visualización no icónica, sino también para pasar, dentro de la visualización no icónica, de una deconstrucción instrumental de las formas a una deconstrucción heurística? De igual manera, ¿se puede considerar que las actividades de construcción, que imponen instrumentalmente una deconstrucción de las formas visualmente reconocidas, sean suficientes para una transferencia hacia competencias heurísticas? Parecería que es una opinión ampliamente compartida, por lo menos si se considera la importancia dada desde hace unos treinta años de las actividades de construcción, incluso si no parece ayudar a la mayoría de los estudiantes a superar la evidencia perceptiva inmediata y a desarrollar estrategias de exploración visual de las figuras para resolver problemas de geometría.

De hecho, para comprender la complejidad cognitiva del paso de la visualización icónica a la visualización no icónica se requiere olvidar la gama muy rica de todas las actividades propuestas a los estudiantes para establecer un puente entre lo que sería práctico y lo que sería teórico, o entre lo que sería concreto y lo que sería formal, o entre lo que sería espacial y lo que sería propiamente geométrico, o incluso entre lo que sería material y lo que sería "mental". Es necesario plantearse la pregunta que viene antes de todas esas oposiciones demasiado globalizantes: ¿cuál es la manera matemática de ver exigida por la utilización del lenguaje natural en geometría (enunciación de propiedades, definiciones, teoremas, deducción de otras propiedades, etc.)? ¿Es acaso una de las cuatro maneras de ver, o solo uno de los dos modos de visualización no icónica, o hay que buscar otra? Aquí reencontramos la pregunta que habíamos dejado en suspenso (Figura 4): ¿existen dos o tres maneras no icónicas de descomponer las formas? Si hay una tercera, ¿qué tipo de actividad la promueve?

La manera de ver requerida en geometría: la deconstrucción dimensional de las formas

La manera matemática de ver las figuras consiste en descomponer cualquier forma distinguida, es decir, reconocida como una forma nD/2D, en unidades figurales de un número de dimensiones inferior al de esta forma. Por ejemplo, la figura de un cubo o de una pirámide (3D/2D) se descompone en una configuración de cuadrados, de triángulos, etc. (unidades figurales 2D/2D), y los polígonos se descomponen a su vez en segmentos de recta (unidades figurales 1D/2D). Las rectas o los segmentos se pueden descomponer en "puntos" (unidades 0D/2D) (véase Figura 20). Nótese que con los puntos salimos de toda visualización. En efecto, los puntos solo son visibles cuando aparecen como la intersección de unidades 1D/2D (trazos secantes o trazos que forman esquina —"vértices", "ángulos", etc.). Dicho de otra forma, la marca de un punto sobre un trazo o fuera de él (por ejemplo para fijar los extremos de un segmento o su punto medio) corresponde a una codificación simbólica. ¡Es además a esta codificación simbólica a la que se le asocian generalmente letras!

Para poner en evidencia el carácter irreductible de esta manera de ver a las maneras analizadas antes, y para mostrar que constituye el primer umbral decisivo para el aprendizaje de la geometría, es suficiente compararla con la descomposición heurística de las formas.

La descomposición heurística por división mereológica de las formas reconocidas

La utilización heurística de una figura exige con frecuencia que se la mire como si se tratara de las piezas de un rompecabezas, pero eso supone que se la descomponga en unidades figurales del mismo número de dimensiones que la figura de partida. Por ejemplo, un triángulo (2D/2D) se puede descomponer en otros triángulos (2D/2D). Pero también, un cubo material (3D/3D) o cualquier otro sólido, se puede dividir en bloques que también serán poliedros (3D/3D). Esta división, que llamaremos una división mereológica (división de un todo en partes que se pueden yuxtaponer o superponer), se hace siempre para reconstruir, con las partes obtenidas, una figura a menudo muy diferente visualmente.

Esta descomposición se inscribe entonces en un proceso más general de *metamorfosis* (para no decir de *anamorfosis*, que es una transformación por un proceso de deformación continua). La descomposición mereológica de las figuras es uno de los procedimientos más antiguos en la historia de la geometría (Edwards, 1979). Además, las primeras "demostraciones" de la relación pitagórica se basaban en operaciones de descomposición para lograr una reconfiguración mereológica (Padilla, 1992). Esta descomposición puede ser:

Estrictamente homogénea: la descomposición se hace en unidades de la misma forma que la figura de partida. Las cuadrículas constituyen figuras de fondo (¡los "soportes" de representación!) que a menudo guían las primeras operaciones de descomposición mereológica.

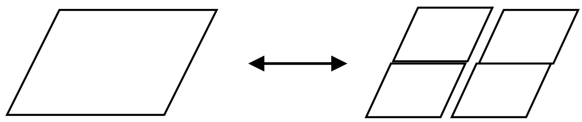


Figura 6

Homogénea: la descomposición se hace en unidades figurales diferentes de la forma de la figura de partida, pero todas de la misma forma.

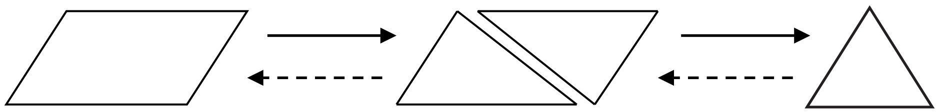


Figura 7

Heterogénea: la descomposición se hace en unidades figurales de formas diferentes entre ellas. El problema de la división de un rectángulo en dos partes, una de las cuales es un triángulo, para formar un paralelogramo implica una descomposición heterogénea de ese tipo.

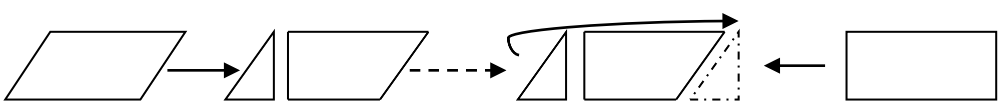


Figura 8

Las descomposiciones homogéneas son transformaciones visualmente reversibles que pueden ensamblarse espontáneamente al ver la figura. Por el contrario, las descomposiciones heterogéneas no son visualmente reversibles.

Para una figura de partida determinada por el enunciado de un problema hay evidentemente varias descomposiciones mereológicas posibles, pero no todas conducen a la solución del problema. Sucede incluso a veces que las que conducen a la solución no son directamente visibles en la figura. Dicho de otra manera, hay situaciones en las que la figura ayuda a ver y otras en las que impide ver. Podemos determinar los factores que favorecen o inhiben esos procesos de división mereológica y de reorganización de las formas reconocidas (Duval, 1995b). Y esos factores pueden ser variables didácticas para actividades que procuran llevar a los estudiantes a la utilización heurística de las figuras.

La descomposición mereológica presenta una doble particularidad:

- Se puede operar materialmente (por recorte y reorganización de las piezas tomadas como en un rompecabezas), gráficamente (agregando lo que llamamos anteriormente trazados reorganizadores) o incluso a simple vista (y no "mentalmente"). Esas tres modalidades son casi equivalentes, salvo una diferencia: cuando una parte debe intervenir de manera simultánea en dos reconfiguraciones parciales diferentes, es necesario disponer materialmente de dos piezas para esta misma parte.

- La descomposición por división mereológica con mucha frecuencia no tiene relación directa con el discurso matemático, y por eso permite la exploración puramente visual de una figura de partida para detectar las propiedades geométricas que se van a utilizar para resolver un problema planteado.

La descomposición por deconstrucción dimensional de las formas

La deconstrucción dimensional presenta dos características que la oponen no solamente a la descomposición mereológica sino también a la deconstrucción instrumental.

- Se hace necesariamente en articulación con una actividad discursiva. Podríamos incluso decir que es en esencia de orden discursivo. Para representarla gráficamente, hay que transformar de alguna manera las figuras geométricas en esquemas. Por ejemplo, la sola enunciación de las propiedades características de un paralelogramo implica que se deconstruya dimensionalmente una figura simple 2D/2D en una configuración de unidades figurales 1D o 0D/2D, pues las propiedades de un objeto 2D/2D (por ejemplo, el paralelogramo representado por la Figura 9) son relaciones entre objetos representados por unidades figurales 1D/2D (las configuraciones B y C de la Figura 9) o 0D/2D.

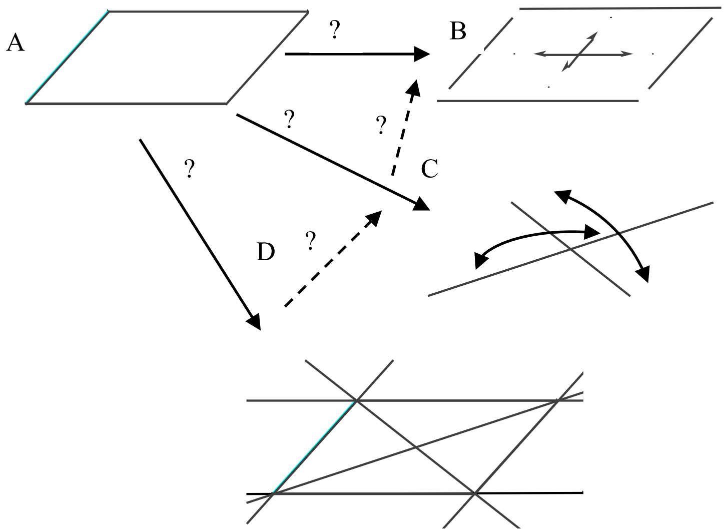


Figura 9. Descomposición en unidades figurales por deconstrucción dimensional de una forma

Esta deconstrucción dimensional representa una revolución cognitiva para el funcionamiento espontáneo de la visualización icónica o no icónica. La deconstrucción dimensional de las formas es un cambio repentino de mirada que va en contra de todos los procesos de organización y de reconocimiento perceptivo de las formas. Ese no es el caso de la descomposición del tipo rompecabezas: en esta, por el contrario, se moviliza ese proceso tratando de superar las limitaciones o las restricciones inmediatas.

La primera ley de la organización y del reconocimiento perceptivo de las formas es la prioridad inmediata y estable de las unidades figurales 2D sobre las unidades figurales 1D. Eso quiere decir no solamente que primero se ve un paralelogramo antes de ver cuatro lados, sino también que todos los trazados que se perciben de entrada como formando el contorno de la superficie, permanecen, de cierta manera, inseparables de este reconocimiento visual elemental. Los lados de un polígono siguen siendo los bordes no separables de la superficie que delimitan. Esto hace inconcebible e invisible el proceso de deconstrucción dimensional de las formas. Incluso las actividades de construcción de figuras, en las que esta es impuesta *de facto* por los instrumentos, permanecen prácticamente sin efecto sobre el funcionamiento cognitivo que impone la primacía visual de las formas 2D sobre las formas 1D o las unidades 0D.

La razón es que en las actividades de construcción de figuras, la atención se centra precisamente en la reconstrucción de unidades figurales 2D a partir de unidades figurales 1D producidas automáticamente por el instrumento. Por eso la deconstrucción dimensional, es decir, el paso de las superficies a las líneas (que no son visualmente bordes), representa una revolución cognitiva con respecto a los otros tipos de visualización. Es aun más difícil de realizar que el paso de los sólidos a las figuras planas que se puede obtener con un plano de intersección.

Mientras que la descomposición mereológica se puede realizar o simular materialmente con objetos físicos que se separan y se reúnen de otra manera, la deconstrucción dimensional no se puede materializar. Ni siquiera se puede mostrar gráficamente, a menos que se introduzca una pareja de figuras relacionadas entre sí, según la estructura proporcional de una equivalencia o de una implicación. En la Figura 9, el esquema fusiona tres proposiciones a las que corresponden respectivamente las relaciones A→B, A→C, A→D, que no es la manera habitual de visualizar practicada en la enseñanza y en los libros de texto, ¡lo que a su vez corresponde a menudo a la manera de ver del botánico!

Podemos entonces ver a la vez la similitud y sobre todo la oposición entre división mereológica de las formas 3D o 2D y la descomposición dimensional de las formas nD en formas (n-1)D. Mientras que la división mereológica se hace para lograr una reconfiguración que haga aparecer nuevas formas que no eran reconocibles en la figura de partida, la deconstrucción dimensional se hace para una (re)construcción deductiva de los objetos representados. Dicho de otra manera, la división mereológica permanece puramente visual, mientras que la deconstrucción dimensional está completamente subordinada a un discurso axiomático o axiomatizable.

La descomposición por deconstrucción dimensional de las formas percibidas corresponde al funcionamiento profundo de la visualización en geometría

Cuando decimos "funcionamiento profundo", queremos significar que las otras maneras de ver se quedan en la superficie. Esto conduce a modificar la noción de "figura", ya sea que se entienda esta palabra en su sentido clásico o que se la entienda según la oposición entre dibujo y figura, oposición que en realidad es entre el carácter particular de toda visualización realizada y el carácter general de las propiedades del objeto representado. Para que una figura dé lugar a una visualización geométrica, debe surgir de lo que hemos llamado un "circuito de visualización" organizado alrededor de una trama de trazados 1D/2D, pues a partir de una red de rectas se puede hacer aparecer una gran diversidad de formas 2D/2D. La solución del siguiente problema (Figura 10), en el que se pide reproducir una figura con una regla no graduada, permite poner en evidencia este proceso.

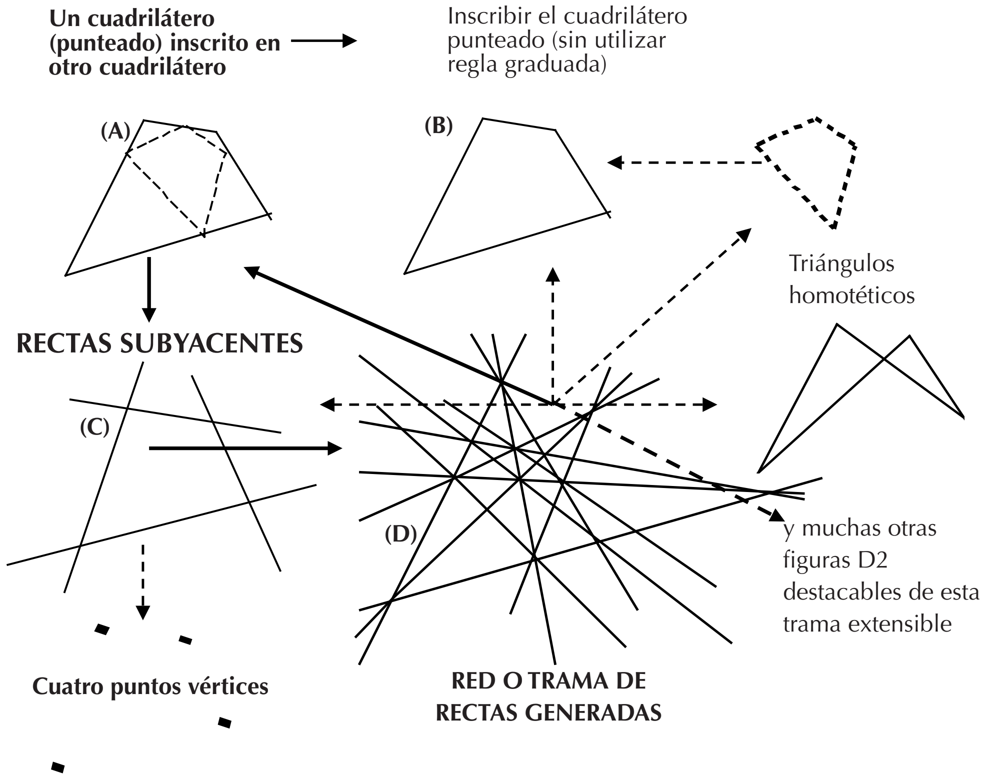


Figura 10. Cambio entre figuras (D2) a partir de una trama de rectas (D1)

Para reproducir dentro del cuadrilátero (B) el cuadrilátero punteado que está inscrito en el cuadrilátero (A), es necesario comenzar trazando las rectas soporte del cuadrilátero (B). Se obtiene así la primera red de rectas que se puede desarrollar prolongándolas para hacer aparecer nuevos puntos de intersección y construir así nuevas rectas que pasan por dichos puntos. Sobre la red de rectas (D) generada de esta manera, se puede distinguir una gran variedad de polígonos, algunos de los cuales corresponden a la configuración inicial (A). Es esta trama subyacente la que permite pasar de una figura a otra y, por lo tanto, reproducir la figura pedida. Por supuesto, para pensar en esta solución, se tiene que reconocer en esta red una gran variedad de polígonos.

En la visualización icónica, toda figura tiende a ser una representación estable o no modificable, porque es imagen por representación de un objeto. Con la deconstrucción dimensional, la figura solo es una configuración particular y transitoria, contextualmente destacada de una red o de una organización más compleja; el enunciado del problema determina la figura particular que se destaca. Dicho de otra manera, en geometría plana, toda figura es una configuración transformable en otras, cada una de las cuales se destaca dentro de una misma trama, según las propiedades o los objetos que se nombren.

Así que hay dos puntos esenciales para comprender el funcionamiento en profundidad de la deconstrucción dimensional de las formas.

1. El campo real del trabajo sobre las figuras está constituido por la trama de las unidades figurales 1D/2D, y ya no por las unidades figurales 2D/2D que a menudo se introducen como las figuras de base. A partir de la red de rectas se puede hacer aparecer una gran diversidad de formas 2D/2D. Pero eso requiere también el reconocimiento de formas no visibles inmediatamente, del tipo de la que se requiere en la descomposición mereológica.

2. Esta deconstrucción dimensional de las formas es el requisito para una comprensión eficaz de toda enunciación de las propiedades geométricas y, por lo tanto, para su movilización efectiva por parte de los estudiantes en la resolución de problemas.

Para ilustrar estos dos puntos, volvamos al problema del reformateo de un triángulo en paralelogramo. La justificación de la solución, pero no su descubrimiento, que se puede obtener al final de *n* intentos de varias reconfiguraciones, recurre al teorema de los puntos medios y a las propiedades del paralelogramo. Pero, por el contrario, ¿basta con conocer ese teorema para encontrar la solución? Es decir, ¿existe una estrategia visual para pasar de la figura de un triángulo a la reconfiguración IV (Figura 11)? Es necesario ver el triángulo que se desea dividir sobre el fondo de la red de rectas que soportan los lados, o tener el reflejo de generar esa red de rectas (III) subyacentes a esta figura. Esta red contiene, entre otras figuras posibles, al triángulo que se va a dividir y al paralelogramo obtenido por reconfiguración. Además, como contiene las figuras de partida y de llegada (el paralelogramo), esta red se articula de manera pertinente y congruente con la justificación matemática.

Una red de rectas soporte, construida a partir de una figura de partida, contiene potencialmente una gran variedad de figuras 2D que se pueden hacer aparecer mediante la formulación de preguntas. Tal red permite ver el paso matemático de unas a otras, es decir, las propiedades que lo hacen posible. En el ejemplo que acabamos de examinar, la única figura que permite ver es III, todas las otras no son más que subfiguras visualmente destacables de la configuración III, como en el ejemplo dado anteriormente (Figura 10).

Desde un punto de vista cognitivo, eso quiere decir que los estudiantes deben desarrollar paralelamente dos tipos de capacidades para entrar en la manera matemática de ver las figuras:

- Por una parte, la deconstrucción dimensional de formas 2D que saltan a la vista, incluyendo la de las figuras consideradas como de base, para la construcción de la red de rectas cuyas formas 2D no son más que subfiguras. La adquisición de tal capacidad es un proceso largo y necesita la organización de secuencias de actividades específicas (Godin, 2004).

- Por otra parte, el reconocimiento de todas las configuraciones 2D que potencialmente se pueden reconocer en una red de rectas en la que no son visibles a primera vista.

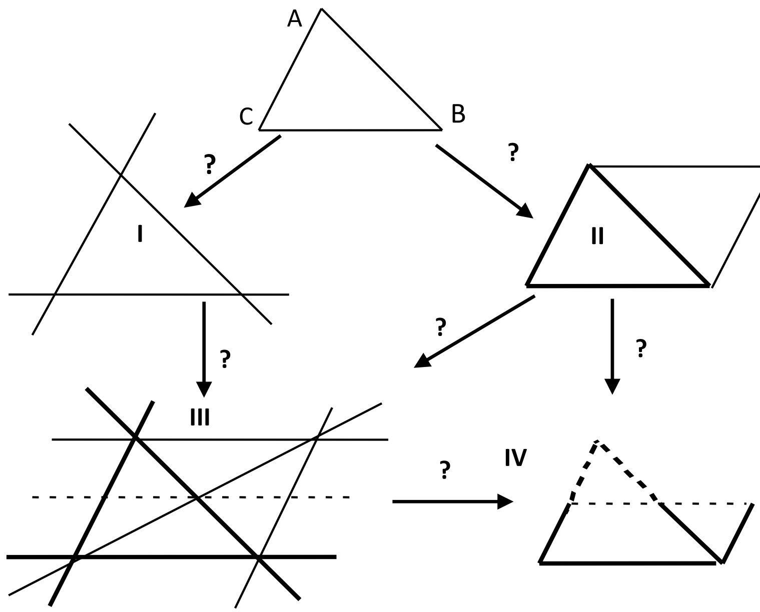


Figura 11. Deconstrucción dimensional del triángulo de partida

"Ver" y decir: ¿Cómo y hasta dónde se pueden reunir en geometría?

Lo que se denomina "figura" en geometría es un todo en el que se combinan hipótesis relativas a propiedades con una representación visual. Concretamente, esto se traduce en el hecho de que la codificación (letras que codifican puntos de intersección u otros puntos, marcas que codifican las propiedades dadas en las hipótesis) hace parte de la figura. ¡Un análisis en términos de registro de representación conduce a ver únicamente una asociación superficial! En realidad, las figuras geométricas dependen de dos registros de representación que son cognitivamente heterogéneos, pues conservan sus propias posibilidades de tratamiento, lo que quiere decir que funcionan en paralelo y de manera independiente. Para darse cuenta de esto, basta con recordar la doble variación siguiente:

- Para una misma representación visual, se pueden tener varios enunciados diferentes y, por lo tanto, “figuras geométricas” que son diferentes desde el punto de vista matemático.

- Para un mismo enunciado, se pueden tener diferentes representaciones visuales posibles, es decir, “imágenes” diferentes para mantener el punto de vista psicodidáctico corriente y natural.

Los problemas específicos que plantea el aprendizaje de la geometría no provienen únicamente de la complejidad de la visualización no icónica y la deconstrucción dimensional de formas que la sustenta, sino también de la manera como puede articularse un discurso geométrico con esta visualización. La razón es que la actividad geométrica presupone siempre la sinergia entre los funcionamientos propios a esos dos registros de representación. Esta articulación es cognitivamente más compleja que la articulación espontánea entre lenguaje e imagen, incluso si se tiene en cuenta la diversidad de las maneras de ver que hemos analizado (Figura 1).

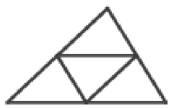
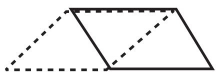
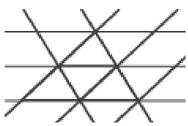
Registro de la visualización Un juego de reorganizaciones visuales según la forma o según el número de dimensiones	**ARTICULACIÓN**	**Registro del discurso** Aplicación, en toda formulación, de tres tipos de operaciones discursivas
Figura de partida 1  Figura de partida 2  Figura de partida 3 	¿Cuáles elementos de los enunciados permiten un anclaje en la visualización? ¿Qué función tiene la figura con respecto al enunciado y a la resolución del problema: —ilustración, —heurística, —objeto soporte para mediciones?	**Enunciado 1.** A’C’ y AC son paralelas A’B’ y AB son paralelas B’C’ y BC son paralelas Probar que A es el punto medio de B’C’. **Enunciado 2.** ABED y BCED son paralelogramos. Probar que B es el punto medio de AC. **Enunciado 3.** … Enunciados de propiedades para aplicar… (por ejemplo, el teorema de los puntos medios).
¿QUÉ SE VE? H1 ¿Cuáles son las posibilidades de transformación de la figura tomada como figura de partida que son visualmente accesibles? H2 ¿Cuáles son las organizaciones que pueden hacer ver lo que se busca?	¿La doble codificación basta para que haya comunicación y sinergia de funcionamiento entre los dos registros?	**¿QUÉ HAY QUE VER?** ¿A qué corresponden visualmente: L1. los términos empleados en los enunciados (cuando se plantea un problema, cuando se formula una conjetura, cuando se dan instrucciones…)? L2. las proposiciones (definiciones, teoremas, …)? L3. los razonamientos para justificar o probar (deducción o refutación)?

Figura 12. Las dos preguntas del problema cognitivo de la articulación entre visualización y discurso

Para introducir el análisis, partiremos de un estudio que puede parecer muy antiguo, pero que aún hoy en día tiene la ventaja de aplicar a la vez variaciones de enunciados y variaciones de figuras en el estudio de los problemas dados a los estudiantes (Dupuis, Pluvinage y Duval, 1978). En la Figura 12 hemos separado la figura y su doble codificación: la codificación por letras que tiene como función designar en la figura los objetos nombrados en el enunciado, y la codificación por rótulos y numerales que tiene como función plantear en la figura las hipótesis dadas en el enunciado.

En este ejemplo, los dos enunciados de problema son como dos descripciones análogas que se pueden hacer a partir de una de las tres figuras de partida, pues dan las mismas hipótesis. No obstante, no se acoplan de la misma manera a cada una de esas tres figuras. Los resultados muestran que, de una página a la siguiente, los estudiantes pueden no reconocer en absoluto el mismo problema presentado según dos combinaciones diferentes, como si por ejemplo no hubiera absolutamente nada en común entre la figura de partida 1 y la figura de partida 2 (Dupuis, Pluvinage y Duval, 1978, pp. 75-79).

Sin embargo, el interés de ese trabajo no está ahí. Al margen de la "competencia" requerida para reorganizar visualmente una figura de partida, la variación misma de los dos enunciados permite plantear una pregunta mucho más vasta: ¿cuáles son los elementos discursivos que, en un enunciado, permiten pasar de la formulación de las hipótesis a la figura y que, por lo tanto, permiten articular los trámites discursivos del pensamiento con la movilidad de reorganización visual de lo que se ve? Naturalmente, cuando interviene el lenguaje (y ¿puede acaso haber hipótesis sin lenguaje?), es absolutamente necesario tener en cuenta por lo menos tres niveles de operaciones discursivas (Duval, 1995a): nombrar aquello de lo que se habla, enunciar algo y poner en relación lo que uno dice con lo que se acaba de enunciar para completar, explicar, justificar lo propuesto. Esos tres niveles de operaciones discursivas subyacen a la producción, oral o escrita, de toda formulación.

¿Cuáles palabras usar para expresar lo que se necesita discernir visualmente en una figura?

La geometría requiere la utilización de un vocabulario técnico un tanto pesado. Podemos encontrar muy rápidamente en el currículo la introducción de por lo menos cuarenta términos, y si hacemos la suma de lo que se introduce hasta tercer grado de secundaria, ¡se supera ampliamente la centena de términos! Sin embargo, lo más importante no es eso, sino la heterogeneidad semántica de esta terminología. Toda formulación en geometría recurre a un vocabulario que cubre por lo menos cuatro tipos de términos denominativos.[4] Para hacerlo aparecer, basta con examinar la manera como el sentido de esos términos se puede poner en correspondencia con unidades figurales en el registro de la visualización.

Tal empresa no tiene nada de arbitraria: está en el centro de las exigencias que han contribuido al desarrollo de la geometría en la historia. Las veintitrés definiciones que abren los *Elementos*, y que preceden a los postulados y a las nociones comunes, constituyen el inventario del corpus semántico necesario para toda empresa de Euclides (Euclides, trad. 1990). En ese sentido, esas definiciones son tanto definiciones semánticas como definiciones matemáticas. Su función es fundamentar la articulación del discurso matemático con la organización de la percepción visual de las formas.

En los ejemplos hemos tomado en cuenta el vocabulario referente a las formas en función de la variación dimensional, y no el referente a las magnitudes (longitud, área, perímetro…). Esto se debe a que las magnitudes escapan en gran parte a la visualización debido a que imponen umbrales estrechos de estimación y solo se pueden aprehender mediante operaciones de medición y números. Recordemos, además, que Poincaré las separaba en su descripción de la intuición geométrica.

1.**Términos analítico-descriptivos** que dan un estatus de "elemento" a un trazado en la organización visual de varios trazados: *Directamente asociados a un solo trazado visual*	2.**Términos denominativos de objetos de estudio**: *asociados a una organización visual de varios trazados en una forma típica*	3. **Términos de propiedad característica** que permite clasificar los objetos de estudio: *Asociados a la comparación de trazados como elementos de la organización visual de una forma típica*	4.**Términos de relación entre (elementos) trazado**s **fuera de toda pertenencia a una organización visual**: *no decidibles visualmente*
Elementos D1: lado, diagonal, cuerda, radio… **Elementos D2:** vértice, punto de intersección, ángulo **Elemento D3**: cara, plano de corte (?)	**Objetos D1**: recta, segmento, curva **Objetos D2**: triángulo, cuadrado, paralelogramo, polígono, circunferencia… **Objetos D3**: pirámide, tetraedro, cubo, prisma, poliedro, esfera…	**Relacionados con un tipo de objetos:** • punto medio, centro • isósceles, equilátero, rectángulo, cualquiera • regular, convexo	paralela perpendicular simétrico igual
(Euclides, Libro I) Definiciones: 1, 2, 3, 5, 6, 8, 13, 14, 17	Definiciones: 4, 7, 9, 15, 16, 18, 19, 22	Definiciones: 11, 12, 20, 21	Definiciones: 10, 23

Figura 13. Clasificación de términos geométricos en función de su valor descriptivo de un dato visual

4 Esta clasificación se puede afinar al distinguir términos de relación entre objetos. Por ejemplo, "tangente" es un término de relación entre un objeto D2 y un objeto D1 o un objeto D2. "Secante" también pertenece a esta categoría. Esos términos están asociados a configuraciones particulares. La relación designada es entonces visualmente constatable, pero solo en el campo restringido de la hoja de papel o de la pantalla. Más allá, en el campo perceptivo, se vuelve indiscernible. ¡Los rieles del ferrocarril no parecen paralelos! La expresión "punto en el infinito" se refiere a ese salto. El aporte esencial de tal clasificación es poner en evidencia las diferentes maneras como los términos geométricos se pueden poner en correspondencia con unidades figurales y permitir así un anclaje visual para la descripción verbal de una situación.

Lo importante en el análisis del vocabulario utilizado en geometría no es la cantidad de términos técnicos, sino la extensión del espectro semántico que recubren. En efecto, para describir lo que hay que ver, las matemáticas recurren a dos categorías de términos que no se encuentran en el vocabulario común empleado fuera de las matemáticas para describir lo que se ve: los términos analíticos descriptivos y los términos de relaciones entre trazados considerados independientemente de su pertenencia a la organización visual de la forma de un objeto (columnas 1 y 4 de la Figura 13). Este hecho se debe relacionar con la característica de la visualización geométrica, la deconstrucción dimensional de formas.

Por otra parte, se puede anotar que seis de las veintitrés definiciones de Euclides son únicamente explicitaciones de la deconstrucción dimensional de formas (definiciones 1, 2, 3, 5, 13, 14). La deconstrucción dimensional de formas se convierte en la etapa intermediaria necesaria entre el reconocimiento perceptivo inmediato de las formas y la identificación correspondiente de los objetos matemáticos, como lo muestra el simple examen de las definiciones que se pueden dar de los objetos de estudio (columna 2 de la Figura 13) o de las propiedades características (columna 3 de la Figura 13). Dicho de otra manera, la aplicación de un término de denominación de objeto (columna 2 de la Figura 13) a una figura, o a una subfigura, implica tener en cuenta términos analíticos descriptivos y términos de relaciones entre elementos.

Pero el problema para el aprendizaje es que esas categorías de términos específicos a las matemáticas entran en competencia con un vocabulario no matemático que, por su parte, no implica ninguna deconstrucción dimensional de formas: *trazo, línea, vertical, horizontal, corte…* Ese vocabulario corriente, esencialmente relacionado con una práctica gráfica y con la práctica de desplazamiento en espacios de juego (tablero) o en planos dibujados, tiene un valor descriptivo más inmediato, en la medida en que corresponde, ya sea a lo que se produce por una acción de trazado (*trazo, línea*),o a las referencias físicas del sujeto (*horizontal, vertical*) o incluso a relaciones percibidas directamente y expresables por oposiciones cualitativas (*cortarse / no cortarse, tocarse /no tocarse*).

Consideremos ahora los términos denominativos de objetos (columna 2 de la Figura 13). Ciertos términos presentan la ventaja aparente de pertenecer a la vez al vocabulario matemático y al vocabulario corriente para nombrar o describir objetos o formas (arquitectónicas, por ejemplo) del entorno. La selección y la comprensión de esos términos dependerán de la manera de ver, icónica o no icónica, de quien mira los objetos del entorno o su representación (sección titulada "Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la no icónica"). Para un sujeto que funciona en modalidad icónica de visualización, los términos analítico-descriptivos y los de relación no tienen utilidad ni sentido alguno para expresar lo que ve. Por el contrario, son esenciales para funcionar en modalidad no icónica de visualización.

¿Cómo se pueden poner las proposiciones[5] en correspondencia con una figura o convertirse en una figura?

El papel del lenguaje no es "poner en palabras" lo que ya estaría pensado claramente o vivido, sino ponerlo en proposiciones para construir el pensamiento de los objetos de conocimiento, por lo menos en los campos de las ciencias y las matemáticas. Lo que las proposiciones enuncian constituye un sentido que es irreductible al de las palabras que ellas articulan. Esta irreductibilidad aparece con los problemas específicos que plantean tanto la producción, oral y sobre todo escrita, como la comprensión de las proposiciones, escuchadas o leídas; por ejemplo, la distinción entre una proposición y su recíproca aunque emplean las mismas palabras, o la modificación del sentido relacionada con la cuantificación y la negación, o incluso el cambio de sentido de una proposición en función del estatus que se le da en el desarrollo de un discurso. La cuestión de la articulación entre visualización y discurso se plantea entonces de una manera más precisa. Se trata de saber si esta articulación se limita a los anclajes que los términos empleados permiten establecer en la representación visual, o si, por el contrario, moviliza interacciones más complejas.

La articulación cognitiva entre el registro de la visualización y el del lenguaje no se hace en el nivel de las palabras sino en el de las proposiciones. En efecto, la producción de una representación no es la misma según si se hace o no se hace, en función de la producción previa de otra representación en otro registro. Por ejemplo, una figura se puede producir para ilustrar un enunciado, pero inversamente un enunciado se puede producir para describir o para explicar una figura. Esas dos situaciones desde el punto de vista cognitivo son totalmente diferentes y no conducen necesariamente a las mismas producciones.

5 Tomamos el término "proposición" a la vez en su sentido gramatical amplio, que abarca toda composición sintáctica que contenga un verbo conjugado, y en su sentido lógico más restringido (excluyendo, por ejemplo, las preguntas y la mayor parte de los actos de habla como las promesas, las órdenes, las solicitudes…). En matemáticas, es necesario agregar la restricción del empleo de ese término a cierto estatus en la organización teórica del discurso: el de teorema. Aquí no podemos hacer más que recordar ese fenómeno importante para los aprendizajes y también para la comunicación. Las proposiciones son poco discernibles en el acto auditivo. Lo que se impone a la escucha son las palabras e incluso lo que llamamos palabras clave, que varían de un individuo a otro según su base de conocimientos. Por eso la expresión escrita cumple un papel específico, irreductible a toda expresión oral, por la toma de conciencia de los razonamientos (Duval, 2001, pp. 190-195).

Volvamos al ejemplo precedente (Figura 12) y tomemos el enunciado 1. A partir de este enunciado se puede construir la Figura 3, luego la Figura 1, borrando los trazos que sobran para obtener un contorno cerrado. No se construye la Figura 2: esta figura supone una reorganización visual de las formas reconocidas en las Figuras 1 o 3. Esta reorganización visual es la condición para ver la Figura 2 como una subfigura de la Figura 1. Tomemos ahora la Figura 1. El enunciado 1 se puede ver como una descripción de la Figura 1, pero no el enunciado 2, a menos que se pueda hacer espontáneamente la reorganización visual requerida y pensar en el teorema que se quiere encontrar para resolver el problema. Este es el punto de vista del redactor del enunciado del problema y no el de un estudiante para quien la articulación cognitiva entre visualización y lenguaje todavía no es operante.

Podemos entonces verificar que una figura y un enunciado (lingüístico o simbólico) no tienen uno con respecto al otro las mismas funciones y, por lo tanto, no tienen el mismo estatus. Por eso, cuando se movilizan simultáneamente dos representaciones en dos registros diferentes, es esencial distinguir el estatus de representación autosuficiente para una y el estatus de representación auxiliar para la otra (Seminario IUFM, 1999). De esta manera, en el nivel de las proposiciones, la articulación entre figuras y proposiciones está subordinada a la función que desempeña lo que se produce como representación auxiliar con respecto a lo que se considera como representación principal. La formulación de un enunciado y la selección de una figura dependen de la función que aquello que, en un contexto dado, se considera una representación auxiliar debe tener con relación a lo que se considera matemáticamente una representación autosuficiente. La tabla de la Figura 14 nos da una primera idea.

Funciones que las figuras pueden cumplir con respecto a las proposiciones (consideradas como representaciones autosuficientes)	**Funciones que las proposiciones pueden cumplir con respecto a las figuras (consideradas como representaciones autosuficientes)**
Ilustración o ejemplo, como soporte “intuitivo”	Descripción (de un estado, de una operación, de una relación)
CONTRAEJEMPLO	DEFINICIÓN DE UN OBJETO Explicitación por el aporte de una información o de un dato (las hipótesis)
Objeto cuasimaterial	Comparación de magnitudes discretas o continuas

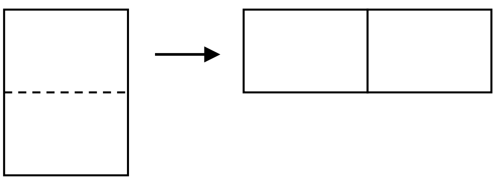
Figura 14. Análisis funcional de la relación entre una proposición enunciada y una figura

Basta, pues, con cambiar el estatus o la función de un enunciado para cambiar su tipo de formulación. Veamos ahora, a manera de ejemplo, dos consecuencias de este análisis funcional de la articulación entre figura y enunciado, es decir, la articulación entre visualización y lenguaje en el nivel de las proposiciones enunciadas: la producción de una figura que sea un contraejemplo y las diferentes definiciones posibles de una recta.

La producción de una figura como contraejemplo de una proposición propuesta como conjetura

Desde un punto de vista matemático, la producción de un contraejemplo constituye la situación en la que la articulación entre visualización y formulación es más significativa, ya que la figura es un ejemplo que toma valor matemático de prueba. Pero quizá no se le ha prestado suficiente atención al hecho de que, desde un punto de vista cognitivo, esta articulación se hace en el nivel de una proposición enunciada y no en el de un razonamiento. Una figura toma valor matemático de prueba cuando es un ejemplo que refuta una proposición propuesta como conjetura. La capacidad de los estudiantes para producir un contraejemplo presupone a la vez el desarrollo de "competencias" relativas a la cuarta manera de ver, la del inventor artesano y una coordinación fuerte entre el registro de la visualización y el de los diferentes niveles de operación discursiva.

El estudio de caso hecho a propósito de la relación entre área y perímetro (Balacheff, 1988) ilustra bien ese funcionamiento cognitivo complejo subyacente a la producción de una figura como contraejemplo. Se trataba de discutir la proposición "dos rectángulos que tienen la misma área, tienen el mismo perímetro". Para rechazar esta proposición, "el esquema siguiente 'muestra' bien esta transformación que se apoya en la invariancia del área por corte y reensamblado:



El área (o el producto) se conserva trivialmente, cuando el aumento del perímetro resulta de la desigualdad: $2L+\frac{l}{2}>L+\frac{l}{2}+\frac{l}{2}$, ya que L > l" (Balacheff, 1988, p. 289). La producción de este contraejemplo, que depende de la operación visual de reconfiguración, pareció no estar "al alcance de los estudiantes", o su producción tomó tanto tiempo que perdió todo efecto de contradicción para que el valor epistémico relacionado con la comprensión inmediata de esta proposición, por estar asociado a una evocación visual icónica, se pudiera cuestionar (p. 299). De manera más general, podríamos mostrar que la capacidad para producir una figura como contraejemplo requiere una práctica espontánea de esta manera de ver propia del inventor artesano. Correlativamente, podríamos mostrar que la visualización más congruente con las proposiciones (enunciados de teorema o definición) es una secuencia de dos figuras.

Figura y definición: el caso de la recta

Puede no parecer pertinente tomar el caso de la recta para analizar la articulación entre figura y definición, dado que la visualización de una recta parece primitiva y evidente: sería el trazo "recto" trazado con la ayuda de un instrumento que, para el caso, es una regla. Además, desde un punto de vista matemático, no es *una* recta lo que es interesante sino la relación entre *dos* rectas, que pueden ser paralelas, secantes, ortogonales, coplanares o no coplanares, etc. Pero volvamos a esos trazados destinados a servir de soporte inmediatamente visible para los términos de esas diferentes relaciones matemáticas. ¿Cómo explicar el sentido de la palabra "recta" aunque fuera para poder distinguir un trazado "recto" y un trazado "curvo" o, más sutilmente, una recta y un segmento (no orientado)? Abreviando, ¿cómo no confundir la recta y cualquier otra línea o cualquier otro trazado gráfico? Lo más común, cuando no se tiene la evidencia del uso empírico de la regla, es conformarse con uno de los cuatro tipos de definición, o de descripción siguientes:

a) "puede hacerse una idea clara mirando
   - un hilo muy delgado, corto (¿?) y bien tenso
   - un rayo de sol que penetra por un orificio muy pequeño en una cámara oscura.

b) La línea recta es el camino más corto de un punto a otro. Ese camino más corto se llama la distancia entre dos puntos…" (Lepoivre y Poirson, 1920, p. 2).

c) "No podemos pensar una línea (recta) sin trazarla con el pensamiento… El trazado de esta línea es un movimiento" (Kant, 1976/1781, p. 167).

d) "Dos puntos distintos A y B son elementos de una y solo una recta. Se dice 'la recta AB'". (IREM de Strasbourg, 1979, p. 164).

La formulación (a) es icónica. Evoca un objeto físico que sirve en cierta manera de modelo para lo que se va a llamar "recta". La formulación (b) es métrica. Pero esta formulación es ciega visualmente, pues no se asocia en manera alguna a una de las imágenes de la formulación (a) ni al uso de la regla, pues esto conduciría a una paradoja en el caso de estar sobre una esfera en la que las rectas se vuelven circunferencias. En realidad, esta formulación métrica implica, sin precisarlo, el tipo de superficie sobre la que se define "el camino más corto". La formulación (c) es dinámica e icónica. Se refiere al movimiento que la produce, movimiento que le confiere por lo menos dos propiedades: el hecho de que la recta puede prolongarse siempre más allá de su trazado y el hecho de que es continua. La formulación (d) es afín. Se opone radicalmente a las tres precedentes, ya que, según el principio de búsqueda de economía máxima que rige la formulación de las definiciones matemáticas, caracteriza a una recta solamente con dos puntos sin siquiera recurrir a cualquier cosa que los conecte como en las formulaciones (b) o (c).

No obstante, la dificultad de esta formulación no proviene de la supresión del valor visual del trazo, pues los dos puntos sirven necesariamente de base para trazar una recta; se debe al hecho de que los puntos escapan a toda visualización. Un punto no tiene existencia visual propia, es decir, no puede constituir una unidad figural identificable**.** Un punto es siempre un efecto de marca, de codificación, ya sea con una letra, o por un número (graduación de una recta) para fijar un extremo o una separación y, por lo tanto, se refiere solo al discurso.

La visualización se detiene en los trazados de segmentos que son las unidades figurales más pequeñas o, si se prefiere, una formulación más física, que son los pixeles de toda representación geométrica. Por supuesto, existen puntos "notables" que aparecen con dos rectas secantes, o con los vértices de los polígonos o de los poliedros. Pero visualmente la unidad figural es una configuración de dos trazos, prolongados o no y, por lo tanto, están intrínsecamente relacionados con el elemento visual D2 que es un ángulo (columna 1 de la Figura 13). Además, esos puntos notables no pueden ser muy numerosos.

¿Qué retener del análisis de esos cuatro tipos de formulación? Las tres primeras definiciones son de alguna manera descripciones de una característica óptica inmediata (a), o de un procedimiento de medida físico de una distancia entre dos puntos de referencia fijados materialmente (b), o de un gesto que utiliza o no un instrumento de trazado (c). Esas definiciones-descripciones son representaciones auxiliares con respecto a representaciones visuales, o "perceptivo-gestuales" para retomar la expresión propuesta por G. Vergnaud, que son aquí las representaciones autosuficientes. Ellas constituyen un obstáculo intuitivo a la cuarta definición, que rompe con toda visualización. ¿Cómo sorprenderse entonces de que los estudiantes se desconcierten ante todos los problemas en los que se pide mostrar la colinealidad de tres puntos, cuando en la figura parecen estar sobre el mismo trazo? De manera más general, las tres primeras definiciones son pragmáticas, por lo cual se oponen radicalmente a las definiciones matemáticas, al menos si nos atenemos al funcionamiento cognitivo subyacente a la producción y la comprensión de esas definiciones. En efecto, hay dos exigencias que conducen a una inversión de las gestiones cognitivas cuando se pasa de definiciones pragmáticas a definiciones matemáticas.

- *Tener en cuenta los casos posibles y no solamente los datos observables*. Todas las definiciones pragmáticas se hacen a partir de un corpus de datos observables e incluso, en muchas ocasiones, a partir de datos que son los más frecuentemente observados. Pero, en matemáticas, para aceptar o refutar una proposición propuesta como conjetura o incluso solo como definición, un individuo no se puede atener a la base de conocimientos de que dispone o que la experiencia concreta le proporciona; tiene que explorar los diferentes casos posibles. Por eso la producción de un contraejemplo puede parecer el resultado de una "invención" con respecto a los conocimientos de los que disponía el individuo.

- *Búsqueda de una economía máxima*. Cuando se trata de definir los objetos cuyo conocimiento depende de la observación y ello da lugar a una visualización icónica, hay una exigencia inversa de exhaustividad que se impone en la definición de un objeto. Se trata de enumerar todas las propiedades como se enumeran todos los detalles importantes. Las definiciones matemáticas resultan, por el contrario, de una actividad de reducción para obtener la descripción mínima: de una lista de propiedades que pueden atribuirse a un objeto, se trata de retener solo las que bastan para encontrar, por deducción, todas las otras. Naturalmente, esto abre el camino a varias definiciones posibles de un mismo objeto. Por ejemplo, se pueden tener por lo menos tres definiciones diferentes de paralelogramo.

¿Qué solapamientos hay entre visualización y razonamientos para justificar o para probar?

En efecto, nadie confunde la enunciación de proposiciones y el progreso discursivo a través del cual se conduce y desarrolla un razonamiento. Pero las cosas se vuelven más delicadas, más difíciles de distinguir, cuando se trata de explicar en qué se diferencia un razonamiento de una descripción o de una explicación y, sobre todo, en qué es diferente un razonamiento que justifica, como por ejemplo en el marco de un debate sobre un asunto de sociedad o para tomar una decisión, de un razonamiento que demuestra, como en matemáticas.

Resulta ingenuo invocar la lógica, o la "derivabilidad lógica", cuando se trata de razonamientos que se hacen en lenguaje natural y con sus recursos, pues esto no permite comprender por qué las deducciones válidas no tienen de ninguna manera fuerza de prueba a los ojos de los estudiantes y cómo se inscriben ellas en el lenguaje natural. Es inútil recordar ese muro invisible al que se enfrenta la enseñanza de la geometría a partir de la secundaria. La utilización de definiciones y de teoremas para demostrar la verdad de nuevas proposiciones no genera ninguna conciencia de necesidad en el espíritu de los estudiantes. En efecto, para que se pueda producir esta conciencia de necesidad, es necesario haber comprendido primero el mecanismo discursivo, muy específico, por el que una proposición nueva se produce deductivamente como conclusión de otras proposiciones (hipótesis y teorema). Y solo con base en esta comprensión se puede hacer la transferencia del grado de convicción ligado a una proposición (su valor epistémico[6]) a otra proposición, por lo menos para quien realiza la operación discursiva del paso de deducción. Esto se debe a que los teoremas no se utilizan y no funcionan en absoluto como argumentos.

Los teoremas movilizan un mecanismo de expansión discursiva que consiste en una sustitución de unas proposiciones por otras, mientras que los argumentos proceden por composición acumulativa de unas proposiciones con otras, como sucede al tratar de convencer a alguien, y este mecanismo es común a todas las otras formas de discurso y a toda práctica de habla (Duval, 1995a, pp. 123-131, 255-266). ¿Es necesario recordarlo? Nadie habla basándose en el mecanismo discursivo de sustitución, ¡ni siquiera el matemático fuera de las matemáticas! Este mecanismo de expansión discursiva por sustitución conviene mejor a los registros simbólicos que al del lenguaje natural, pero es en el registro del lenguaje natural en el que los estudiantes pueden de mejor manera tomar conciencia de su especificidad tan particular y de su fuerza, no solamente de prueba sino de invención.

Vemos entonces que no hay que confundir los razonamientos argumentativos que apoyan una proposición planteada como elección, como hipótesis (fuera de las matemáticas), o como conjetura… y los razonamientos válidos que permiten demostrarla. No puede haber transferencia de aprendizaje de uno a otro porque sus funcionamientos respectivos son de alguna manera opuestos, además de que la práctica de los unos está comúnmente difundida, mientras que la práctica de los otros es excepcional, y se encuentra casi reducida al campo de las matemáticas. También vemos que desde un punto de vista didáctico, no hay que confundir razonamiento y prueba, pues los contraejemplos no movilizan en absoluto las mismas operaciones discursivas que las deducciones válidas o que el razonamiento por el absurdo. Además, las posibilidades y la selección de los trámites para probar no son las mismas según que la conjetura resulte verdadera o falsa, lo que no se puede saber *a priori*.

6 Recordemos que el sentido de las proposiciones enunciadas no es unívoco. Comprende tres dimensiones, según si se considera el contenido, su valor con respecto a una base de conocimientos, o su papel en la organización de un discurso o en un acto de comunicación (Duval, 2001, p. 198). Todo razonamiento obliga a tomar simultáneamente en cuenta esas tres dimensiones, lo que no sucede para los relatos, las descripciones o las explicaciones.

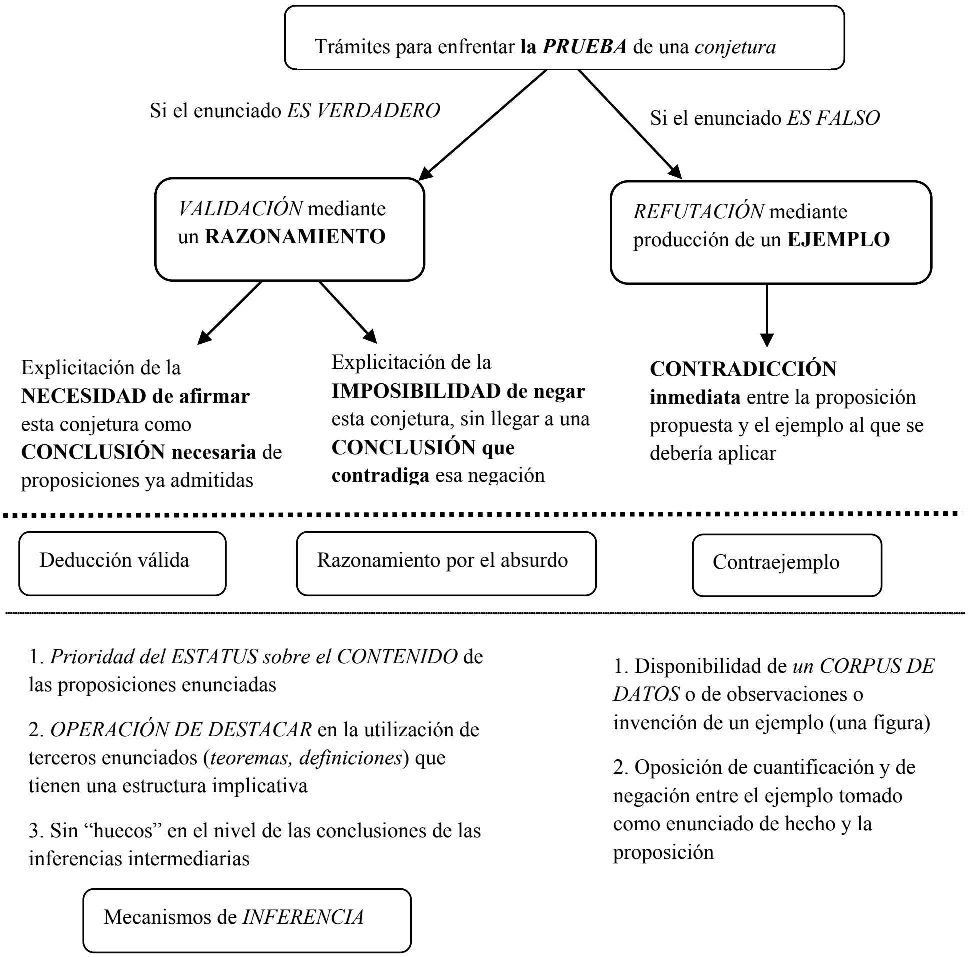


Figura 15. Clasificación de los trámites para probar, en función de los procesos cognitivos movilizados

Era indispensable recordar esto para plantear bien la pregunta de las relaciones entre visualización y razonamiento (y no globalmente, la prueba): ¿qué tipo de visualización puede corresponder al desarrollo de un razonamiento y cumplir, bien sea la función heurística que se espera de las figuras para la resolución de problemas, bien sea la función de justificación propia de la argumentación? Para responder a esta pregunta, debemos distinguir tres situaciones muy diferentes. Hay, en efecto, razonamientos que siguen la visualización, hay los que compensan el defecto de visualización, como en el caso de problemas de geometría del espacio y no de geometría plana, y hay los que por el contrario son independientes de toda visualización.

Los razonamientos que siguen la visualización, o la visualización como argumento que justifica

Nos limitaremos aquí a un ejemplo muchas veces citado: la visualización que justifica la relación de Pitágoras. En general, se limita a una secuencia de dos figuras, una que presenta el estado inicial y la otra el estado final de la reconfiguración interna de un cuadrado en otro cuadrado.

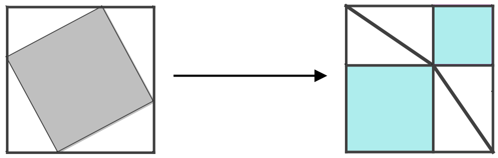


Figura 16. Estado inicial y estado final de la reconfiguración global que justifica la relación de Pitágoras

Evidentemente, se trata de una visualización truncada que no muestra gran cosa y no puede, por tanto, tener en sí misma un poder de prueba. Primero que todo, se supone que uno debe ver que el cuadrado rotado en el estado inicial representa el cuadrado de la hipotenusa y que los dos cuadrados sombreados en el estado final representan la suma de los cuadrados de los otros dos lados. Esta suposición nos remite a la articulación del nivel precedente, entre una proposición (aquí una conjetura) y una figura. Pero aquí la cuestión se plantea a otro nivel: ¿cómo ver, o hacer ver, la igualdad que se quiere probar, dado que la región rotada y las regiones sombreadas del estado final no se pueden superponer? La visualización está en la transformación representada por la flecha. Es necesario entonces efectuarla de una manera u otra para poder ver.

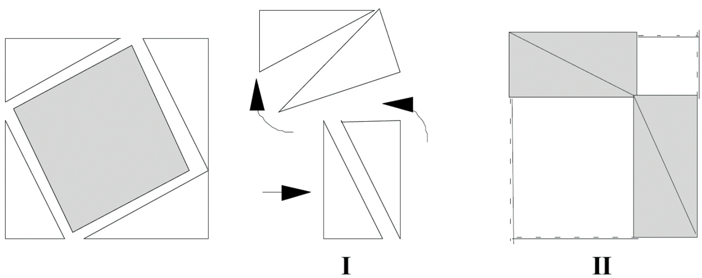


Figura 17. Transformación que combina dos reconfiguraciones

Los cuatro triángulos deben reconfigurarse en dos rectángulos, luego estos rectángulos se deben disponer en el marco del cuadrado inicial de manera que aparezcan dos cuadrados. La invariancia de esta transformación está garantizada por el hecho de que las unidades figurales que se desplazan en el curso de esas dos reconfiguraciones siguen siendo las mismas (argumento característico de las operaciones concretas para justificar una conservación, en el modelo piagetiano del desarrollo intelectual). Esta invariancia va a permitir realizar un cálculo cualitativo. En efecto, para poner en evidencia esta igualdad que no se puede ver, ya que las partes involucradas no se pueden superponer, es necesario un cálculo que explicite lo que se ha conservado en esas dos reconfiguraciones (Figura 18). Naturalmente, en lugar de realizar este cálculo, uno puede contentarse con una descripción verbal que tomará entonces el valor de argumento o explicación.

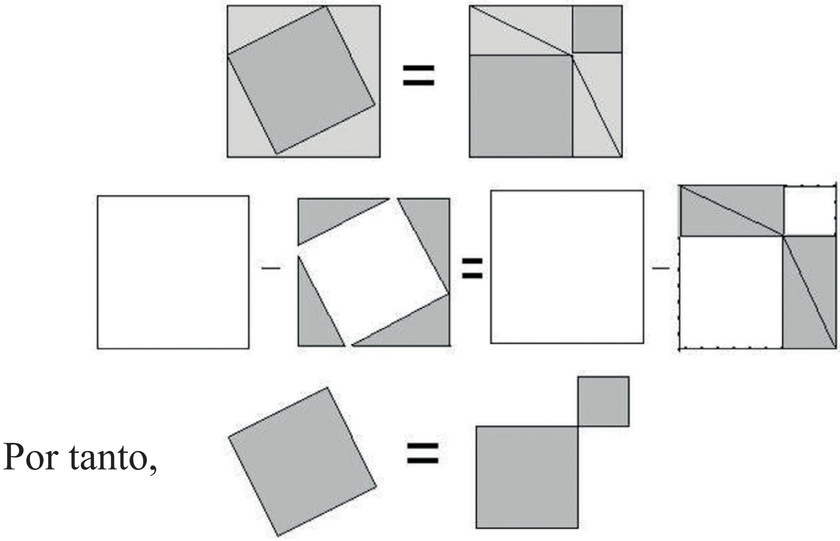


Figura 18. Explicitación de la igualdad entre las áreas para un cálculo cualitativo

Se pueden hacer tres observaciones que permiten generalizar este análisis:

1. En el nivel de la articulación entre visualización y razonamiento, la visualización consiste no en una figura sino en una secuencia de por lo menos tres figuras. Y esta secuencia debe corresponder a operaciones visuales realizables sobre unidades figurales 2D,[7] o si se trata de geometría en el espacio, sobre unidades figurales 3D/2D o 3D/3D. Pero esta visualización excluye operaciones sobre unidades figurales 1D (y, *a fortiori,* la referencia a puntos).

7 Esas operaciones se pueden realizar mediante un simple barrido visual (si se hace muy rápidamente ¡podríamos estar tentados a hablar de actividad mental!) o mediante manipulaciones de piezas de rompecabezas (lo que supone que se pueda disponer de muchas piezas para cada unidad figural, pero así se introduce subrepticiamente un problema de representación semiótica en lo que pretende ser una manipulación puramente material).

2. La secuencia de figuras constituye una representación autosuficiente. La explicación verbal o simbólica de operaciones constituye una representación auxiliar.

3. Ningún teorema, ningún conocimiento de propiedad matemática se moviliza en esta secuencia y, si hay razonamiento, este no se distingue de una simple actividad descriptiva. Podríamos también presentar esta descripción bajo la forma de un silogismo, pero tal presentación no aportaría nada más, ya que no supera la descripción de operaciones que se pueden realizar mediante un barrido visual o incluso materialmente con piezas de rompecabezas. De todas maneras, sin importar la forma de explicación adoptada, simbólica, descriptiva o silogística, esta aparece como secundaria con respecto a la secuencia visual y ¡cae entonces bajo el adagio "una imagen vale más que mil palabras"!

Para comprender mejor la importancia de estas observaciones, miremos otra demostración del teorema de Pitágoras, la de Euclides (Euclides, trad. 1990, pp. 282-284; IREM de Strasbourg, 1986, pp. 245-247), que parece apoyarse también en una visualización. Desde un punto de vista cognitivo, funciona completamente a la inversa del ejemplo que acabamos de analizar. Con respecto a nuestra observación (1), ella implica tomar en cuenta operaciones figurales con unidades 1D y se limita a una sola figura. Con respecto a la observación (2), hay inversión de los estatus: es el discurso el que constituye la representación autosuficiente, mientras que la figura es una representación auxiliar que cumple dos funciones diferentes, soporte descriptivo para ciertas partes del discurso y soporte ilustrativo para ayudar a no confundir los objetos de anclaje de las diferentes proposiciones. Con respecto a la observación (3), ella supone la movilización y utilización de teoremas. Las observaciones (2) y (3) muestran que la comprensión del razonamiento de Euclides supone la comprensión del mecanismo discursivo de sustitución, sin el cual la aplicación de un teorema, es decir, un paso de deducción válida,[8] no podría generar la conciencia de necesidad para la conclusión así obtenida.

Se podría también mostrar que en el caso de la demostración de Euclides, la relación con la figura no se hace en el nivel del razonamiento, sino en el de las operaciones discursivas inferiores: por una parte, el vocabulario para anclar en ciertas unidades figurales y, por otra, las proposiciones enunciadas para focalizar sobre la relación existente entre dos unidades figurales identificadas. En el nivel del razonamiento (y, por lo tanto, de la organización que permite derivar unas proposiciones de otras) no hay correspondencia alguna con la figura.

8 Recordemos aquí que no hay que confundir la validez de un paso de deducción, que se basa en el mecanismo de sustitución, con la validez de un encadenamiento de pasos válidos, que se basa en el hecho de que no haya "hueco" en el encadenamiento de los pasos (que no es un encadenamiento de proposiciones) porque cada conclusión intermediaria se transforma en premisa de un nuevo paso. Esos dos niveles de organización discursiva rara vez se distinguen en los trabajos didácticos consagrados a la iniciación en las pruebas que ¡*validan* un resultado mediante un razonamiento válido! ¿Alcanzan los estudiantes, en alguna medida, a sospechar la existencia de este doble juego, tan extraño a toda práctica del habla, incluso en los debates?

Los razonamientos independientes de toda visualización

Un razonamiento que funciona utilizando definiciones y teoremas (que en ocasiones se denominan, de manera impropia y menos teórica, "propiedades") es independiente de toda visualización e incluso se puede realizar contra toda visualización. Esto se debe a lo que ya indicamos: ese tipo de razonamiento, a diferencia de la argumentación, depende de un mecanismo discursivo de sustitución de unas proposiciones por otras, y no del mecanismo general y espontáneo de composición acumulativa de proposiciones.

Es verdad que siempre es posible proponer problemas en los que las figuras constituyen el campo aparente del trabajo de investigación y que servirán de apoyo para los razonamientos. Pero en ese caso nos limitamos al tipo de situación que acabamos de analizar, el de la demostración de Euclides en donde la figura solo puede ser una representación auxiliar, y donde las correspondencias no se hacen en el nivel del razonamiento sino en el de los términos que designan unidades figurales y en el de las proposiciones.

Esto conduce a que la pregunta sobre la prueba, tal como fue planteada en didáctica entre los años ochenta y noventa, siga vigente: "¿cómo hacer para que la demostración funcione como prueba para los estudiantes, es decir, para que queden convencidos de un resultado matemático?". Esta pregunta ha sido poco entendida, pues se la ha reducido con frecuencia a esta otra pregunta totalmente diferente: "¿cuáles propiedades o teoremas utilizar para demostrar tal conjetura?". Enfocar la atención de los estudiantes en la búsqueda de los teoremas pertinentes para un problema relativo a un contenido particular no basta para lograr el nacimiento de la conciencia dinámica de necesidad que se desarrolla con la utilización discursiva tanto de definiciones como de teoremas, y sin la cual no puede haber experiencia de las pruebas matemáticas.

Para encontrar una respuesta didáctica a la pregunta sobre la demostración, la gran mayoría de caminos explorados se redujo a la visualización o a la argumentación, dejando intacta la pregunta sobre cómo se entra a la comprensión y la producción de razonamientos válidos. Por otra parte, estos últimos suelen ser descalificados recurriendo al adjetivo "formal" que tiene connotaciones muy negativas desde un punto de vista educativo.

Por el contrario, nosotros hemos intentado lograr que los estudiantes descubran cómo y por qué la utilización de un teorema hace necesaria la afirmación de la proposición que se obtiene como conclusión, y cómo se podría construir e imponer una prueba a partir de varias utilizaciones sucesivas de teoremas. Para lograrlo, tuvimos que hacer el desvío por una visualización que no tenía nada de geométrica, pero que permitía a los estudiantes explorar por sí mismos los dos niveles de organización deductiva que constituyen los razonamientos válidos (Duval y Egret, 1989).

Ese tipo de visualización no geométrica se presentaba a los estudiantes como representación autosuficiente, y luego, en un segundo momento, debían describirla libremente. El discurso se introducía primero como una representación auxiliar con respecto a la visualización de la organización deductiva que habían descubierto. Entonces pudimos observar rápidamente esta evolución: la transformación rápida y radical de los discursos producidos con respecto a los procedimientos matemáticos esperados. La toma de conciencia del acceso a un nuevo campo de operaciones discursivas se había producido en los estudiantes, dándoles a la vez la iniciativa y el control en la utilización de teoremas y en la conducción de razonamientos.

Poco importan aquí los resultados obtenidos o no obtenidos hasta ahora en cada una de las vías exploradas, para responder a la pregunta: "¿cómo hacer para que la demostración matemática funcione verdaderamente como una prueba para los estudiantes?". La diversidad de esos resultados permite llamar la atención sobre una observación trivial, pero que poco se tiene en cuenta. Existen varias fuentes de convicción para cada individuo, y los tipos de control posibles para cada una no son los mismos. Ya hemos podido mostrarlo, a propósito de diferentes maneras de ver (Figura 2). Pero este dato esencial para todo análisis de pruebas no se limita a las diferentes maneras de ver.

Asimismo, existe una fuente de certidumbre que viene del consenso que se establece en un grupo al término de discusiones. También hay una convicción que viene de un razonamiento válido, realizado en el contexto de un corpus de conocimientos ya probados, corpus que también debe estar bien asimilado por quien realiza el razonamiento válido. El tipo de respuesta didáctica que se da a esta pregunta de la comprensión de las pruebas en matemáticas siempre privilegia a una de esas fuentes de convicción con respecto a las otras.

En la actualidad, hay una tendencia creciente a considerar la "demostración" como una prueba puramente formal y a limitarse a las pruebas que se apoyan en manipulaciones de figuras o en argumentaciones que se dan en el marco de una discusión de aula. Parecería, entonces, que no es necesario procurar que los estudiantes comprendan el funcionamiento de los razonamientos válidos. En realidad, esto es privarlos de los medios de probar cuando la visualización resulta imposible o demasiado compleja, como en el caso de la geometría del espacio. También, privarlos de los medios de discernir entre figuras pertinentes y figuras engañosas –como las que pueden aparecer en la geometría plana–; y, más bien, llevarlos a recurrir al consenso que se impone a través de una discusión en grupo. Esta elección puede parecer legítima desde el punto de vista de una educación matemática común, pero es una elección dañina para la formación general de los individuos.

En el corazón de la articulación entre visualización y discurso (*definición, teorema, prueba, explicación*) en geometría: el hiato dimensional

Acabamos de barrer el espectro muy amplio de las operaciones discursivas que se movilizan en toda formulación hecha en lenguaje natural, ya se trate de contar, describir, explicar, argumentar en un debate, razonar de manera válida… La complejidad del lenguaje no es ante todo la del vocabulario, sino la de la diversidad de todas las operaciones discursivas que se movilizan en la expresión. En geometría, lo mismo que en todos los dominios científicos, expresar no consiste en poner en palabras, a la manera en que se ponen en palabras las emociones y las "vivencias", sino en articular proposiciones cuya riqueza de sentido es irreductible a las palabras empleadas.

También hemos visto que, según el nivel de las operaciones discursivas que se privilegie, la relación entre decir y "ver" varía considerablemente. Detrás de esta variación, cuya complejidad es más grande en geometría que en todos los otros campos, hay un fenómeno cognitivo fundamental: el hiato entre el número de dimensiones que se toma en cuenta para identificar una unidad figural en lo que se visualiza y el número de dimensiones que se tiene en cuenta para nombrar los objetos y las relaciones que se identifican.

Habíamos mencionado ya este fenómeno del cambio realizado en el número de dimensiones; se aumenta cuando se pasa del decir al ver, y se disminuye cuando se pasa del ver al decir (Duval, 1995a, p. 192). En la Figura 19 se presenta un análisis más detallado. Se puede ver que la articulación entre visualización y discurso está representada por las flechas dobles en gris. Pero podemos también ver que esta articulación presupone la capacidad de efectuar la deconstrucción dimensional de formas en lo que concierne a la visualización (flechas negras gruesas punteadas).

Se notará, por una parte, la oposición entre las flechas ascendentes y descendentes en cada uno de los dos registros de representación y, por otra parte, la existencia de flechas oblicuas que corresponden a la articulación de las representaciones producidas en cada uno de los dos registros.

Miremos primero las flechas continuas en cada uno de los dos registros. Las flechas negras gruesas ascendentes representan el movimiento espontáneo de la visualización que tiende a fusionar las unidades figurales de rango inferior, en una sola unidad figural de rango superior. Además, es eso lo que constituye la potencia cognitiva de la visualización. Las flechas negras sutiles descendentes representan los procedimientos de análisis y de razonamiento propios de la geometría para establecer las definiciones o los teoremas. La articulación entre visualización y discurso geométrico supone ir en contra del movimiento ascendente de la visualización, es decir, contra esta prioridad visual de las unidades figurales de dimensión superior sobre las unidades figurales de dimensión inferior.

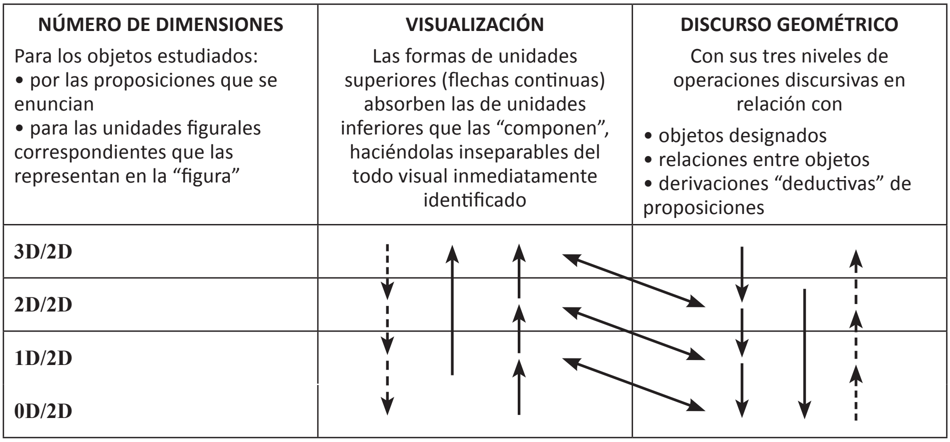


Figura 19. Articulación entre visualización y discurso en geometría

Miremos ahora las flechas punteadas. Las flechas negras gruesas descendentes representan la deconstrucción dimensional de formas, que ya hemos visto que constituye el agujero negro didáctico de todas las actividades hechas con figuras o a partir de ellas. Las flechas negras sutiles ascendentes representan, por el contrario, el orden didáctico de exposición en la introducción escolar de conocimientos. Todas las progresiones de conocimiento parecen organizadas según el mismo orden "conceptual":

((((puntos → rectas) → segmentos de rectas) → polígonos) → poliedros)

La razón es que el conocimiento de propiedades relativas a las diferentes configuraciones posibles que se pueden formar a partir de las relaciones entre rectas y de propiedades relativas a la comparación de dos segmentos deben formar las piezas elementales con las que se pueden construir los conocimientos relativos a los polígonos y a toda la geometría plana (integrando bien el uso del compás y la figura de la circunferencia). Esto va en sentido contrario al del trabajo largo y necesario de deconstrucción dimensional para entrar en la comprensión de los conocimientos geométricos. Privilegiar este orden significa considerar que la deconstrucción dimensional es evidente, cuando en realidad es contraria al funcionamiento normal e intuitivo de la visualización (flechas negras gruesas ascendentes). En la Figura 20 tratamos de representar esta contradicción cognitivamente paralizante.

En ninguna parte, fuera de la geometría, se encuentra ese hiato dimensional entre imagen y lenguaje, entre visualización y verbalización. Este hiato dimensional toma, en la enseñanza de la geometría, dos formas de alguna manera inversas: el hiato dimensional que es intrínseco a la manera matemática de mirar (las figuras) y el hiato dimensional didáctico que resulta de la organización de

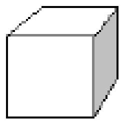
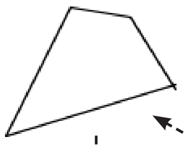
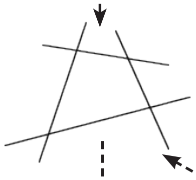
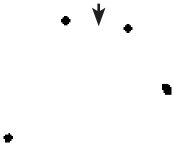
NÚMERO DE DIMENSIONES	VISUALIZACIÓN	DISCURSO "FORMAL" DE EXPOSICIÓN
3D/2D		Un **poliedro**
2D/2D		Un **polígono** que puede ser una cara de un poliedro o la figura obtenida por un plano de corte con otro poliedro
1D/2D		**Rectas** que tienen entre sí relaciones (perpendiculares, paralelas, concurrentes) que permiten distinguir las propiedades del polígono Y las rectas se reducen a **segmentos**. De ahí la posibilidad de compararlos y utilizar la noción de punto medio
0D/2D		Los **puntos** que pueden ser de intersección de rectas, o vértices de un polígono y que no son puntos arbitrarios que se marcan sobre una recta o sobre

Figura 20. Contradicción cognitiva subyacente a la introducción de los conocimientos geométricos

la adquisición de conocimientos, tal como se puede observar en los libros de texto o en los programas curriculares.

Las razones profundas de la segunda forma del hiato dimensional son, por una parte, la deconstrucción dimensional de las formas, que se cree garantizada por el uso de los instrumentos que producen trazos rectos y, por otra, la orientación del discurso geométrico y, por lo tanto, la polarización de todas las operaciones discursivas hacia la producción de pruebas que implican razonamientos válidos, pero reteniendo del lenguaje únicamente el primer nivel de las operaciones discursivas, el que se traduce por el empleo de términos para designar los objetos. Los funcionamientos cognitivos esenciales que se deben construir se desconocen ingenuamente o se rechazan deliberadamente. ¿Cómo sorprenderse de la reticencia de muchos estudiantes ante la enseñanza de la geometría, e incluso de muchos profesores, y de la marginación de la geometría?

Conclusión

Visualización y discurso constituyen dos tipos de funcionamiento cognitivo que a menudo se han opuesto, tanto desde un punto de vista pedagógico como psicológico o matemático. Sin embargo, su articulación es absolutamente decisiva para el aprendizaje de la geometría, pues la actividad geométrica descansa en la sinergia cognitiva de esos dos registros de representación. El problema, particular y recurrente, al que se enfrenta cualquier profesor de geometría, es el hecho de que la articulación entre visualización y discurso es más compleja en la geometría que en todos los otros campos de conocimiento, debido al hiato dimensional inherente a la manera misma de mirar en matemáticas. ¿Cómo analizar el mecanismo cognitivo?

Hay que tomar en cuenta dos puntos de vista: el funcional y el estructural. Dado que la articulación entre ver y decir moviliza simultáneamente dos representaciones, es necesario mirar qué función puede tener la representación tomada como auxiliar en relación con la representación tomada como autosuficiente desde el punto de vista matemático. Esta última puede ser, según los casos, la representación visual o el enunciado. Pero como esta articulación implica que se puedan establecer correspondencias de contenido entre las dos representaciones, independientemente de su estatus de representación auxiliar o autosuficiente, también es necesario mirar la manera como se pueden discernir y organizar las unidades de sentido y las unidades figurales en cada una de las representaciones puestas en sinergia cognitiva. Allí el análisis debe llegar a ser más preciso en la medida en que todo discurso pone en acción tres niveles de operaciones discursivas: el análisis estructural que pone en correspondencia las dos representaciones se debe conducir en cada uno de esos niveles. Aparece entonces una gran variación, a la vez funcional y estructural, según el nivel en el que se esté.

- El anclaje cognitivo de un enunciado sobre una figura se hace, en el nivel de la designación de unidades figurales, mediante el empleo de términos que implican la deconstrucción dimensional de las formas visualmente reconocidas.

- La interacción cognitiva entre visualización y discurso solo comienza verdaderamente en el nivel de las proposiciones que se enuncian, al margen de su estatus (constatación, definición, conjetura) en el discurso producido, pues solo en ese nivel una figura puede tener una función (ilustración, contraejemplo) con respecto a un enunciado y viceversa. Desde un punto de vista estructural, esto se traduce en el hecho de que la visualización requiere un encadenamiento de dos figuras que pueden ser subfiguras de la figura de partida, o el encadenamiento de la figura de partida y de una de sus transformaciones visuales. Desde hace mucho tiempo se ha destacado el hecho de que la conversión visual de un teorema conduce a un encadenamiento de dos figuras.

- Una articulación cognitivamente productiva entre visualización y discurso solo comienza en el nivel de las transformaciones de representación que se pueden realizar de manera independiente en cada uno de dos registros. Pero aquí todo dependerá del registro que se va a privilegiar por las peticiones de justificación o de prueba.

O bien se privilegia la visualización con los invariantes de operaciones (mereológicas u otras) que se ponen en práctica, y entonces el razonamiento se puede asimilar a una explicación descriptiva de estas transformaciones visuales realmente hechas o verbalmente evocadas. La fuente de la convicción proviene entonces de la visualización, y esta descansa no en una figura sino en una secuencia de por lo menos tres figuras en la que las operaciones se refieren a unidades figurales 2D o 3D.

O bien se privilegia el discurso con sus mecanismos propios de deducción válida y entonces la visualización tiene una función heurística para "encontrar" los teoremas que se deben aplicar, lo que implica que la mirada se focaliza esencialmente en unidades figurales 1D. La fuente de convicción ya no proviene de la visualización, sino de la comprensión y del control de los razonamientos deductivos desarrollados.

No obstante, esas dos vías no se pueden poner de manera alguna en el mismo plano. La primera, muy rápidamente, se revela limitada, pues hay muchas situaciones en las que los razonamientos deben compensar un defecto de visualización o se deben hacer contra la visualización. La única situación en la que visualización y discurso se unen para producir una prueba es cuando se produce un contraejemplo (¡siempre y cuando su invención no requiera meses o años de trabajo!).

Pero allí volvemos a bajar del nivel de los razonamientos al de las proposiciones enunciadas, y ese tipo de producción depende, sobre todo, de las capacidades de los estudiantes para realizar transformaciones visuales de figuras. En otras palabras, según el tipo de prueba que se pida a los estudiantes, puede haber convergencia local o divergencia radical entre los procesos de visualización y los de razonamiento.

Los conocimientos geométricos se pueden construir precisamente en el campo de esta actividad cognitiva que es, a la vez, muy diversificada y compleja. La simplicidad de los contenidos matemáticos que se seleccionan y se introducen como base de la enseñanza de la geometría presupone, de hecho, maneras de ver y modos de razonamiento que se apartan de los practicados fuera de las matemáticas o que incluso se les oponen.

Definir organizaciones curriculares para la adquisición de los "saberes" en geometría sin tomar en cuenta las variables correspondientes a los diferentes funcionamientos cognitivos que acabamos de analizar solo puede conducir, a mediano o largo plazo, a un callejón sin salida. La simplicidad de los trámites geométricos está al final de esas diferentes tomas de conciencia que los estudiantes deben hacer tanto para la visualización como para la producción y la comprensión del discurso geométrico.

No podemos esperar que ellos se percaten de sus funcionamientos cognitivos específicos y que además pongan en práctica las coordinaciones complejas necesarias para su sinergia, únicamente haciéndolos trabajar sobre contenidos matemáticos.

Aquí basta con recordar un hecho importante: si se les pide una producción discursiva, se obtienen textos radicalmente diferentes según el tipo de representación visual que les sirve de apoyo. No podemos esperar que los estudiantes, que se limitan legítimamente a los funcionamientos cognitivos propios de la visualización icónica, puedan entrar en la comprensión de enunciados y de trámites discursivos que se apoyen sobre una visualización no icónica y que requieran el reflejo óptico de la deconstrucción dimensional de las formas. Por eso la importancia de un trabajo extenso y específico para hacer entrar en esas maneras tan particulares de ver que son propias de la geometría.

Pero tampoco podemos esperar que los estudiantes, entrenados esencialmente en las maneras de ver del constructor o del inventor artesano, es decir, en una construcción instrumentada de las figuras o las justificaciones por transformaciones figurales, entren en la comprensión del funcionamiento de las deducciones válidas sin las que no puede haber pruebas basadas en definiciones o teoremas. Esto porque el funcionamiento discursivo de los razonamientos matemáticos es, por así decirlo, un funcionamiento "antipalabra".

El desconocimiento de la complejidad cognitiva implicada en toda actividad geométrica no solo es dañino para la enseñanza, también lo es para las investigaciones sobre los aprendizajes de geometría. Por ejemplo, podemos preguntarnos sobre la metodología utilizada en el análisis de las producciones "de lenguaje" de los estudiantes, cuando se realiza esencialmente, si no exclusivamente, en función de los contenidos matemáticos. Si se hace caso omiso de la complejidad de los funcionamientos discursivos, ¿la interpretación del discurso de los estudiantes se reduce a un comentario libre, propio de cada investigador, más que a una explicitación controlable (y, por lo tanto, comparable a otros corpus de producciones "de lenguaje") de las observaciones o de las conclusiones que se sacan?

Podríamos también de la misma manera preguntarnos por el análisis de las tareas propuestas en relación con la visualización, ya sean las que se encuentran en el marco de un libro de texto, de una ficha o de un programa informático. Un gran progreso se hará en la enseñanza de la geometría, para darle un lugar eminente en la formación general del individuo, cuando los contenidos matemáticos se miren con relación a la actividad cognitiva que solicitan, y el desarrollo de esta actividad llegue a ser un objetivo indisociable de los objetivos matemáticos.

Referencias

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. (Tesis de doctorado). Université Joseph Fourrier, Grenoble, Francia. Disponible en http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00326426/en/

Berthelot, R. y Salin, M-H. (1994). *L'enseignement de la géométrie à l'école primaire*. Grand N, *53*, 39-56.

Berthelot, R. y Salin, M-H. (2000). *L'enseignement de l'espace à l'école primaire*. Grand N, *65*, 37-59.

Dupuis, C., Pluvinage, F. y Duval, R. (1978). Étude sur la géométrie en fin de troisième. En *Géométrie au Premier Cycle,* II (pp. 65-101). París: APMEP.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1995b). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Maison (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlín: Springer.

Duval, R. (2000a). Basic issues for research in mathematics education. En T. Nakahara y M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 55-69). Hiroshima: Nishiki Print Co. Ltd.

Duval, R. (2000b). Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20*(2), 135-170.

Duval, R. (2001). Écriture et compréhension: pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves? En E. Barbin, R. Duval, I. Giogutti, J. Houdebine y C. Laborde (eds.), *Produire et lire des textes de démonstration*. París: Ellipses.

Duval, R. y Egret, M.A. (1989). L'organisation déductive du discours: interactions entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *2*, 41-65.

Edwards, C.H. (1979). *The historical development of calculus*. Berlín: Springer.

Euclides (1990). *Les Éléments* (Libros I a IV, trad. de B. Vitrac). París: PUF.

Godin, M. (2004). De trois regards possibles sur une figure au regard «géométrique», à paraître. En *Actes du séminaire national de didactique* des mathématiques. ADIREM et IREM de Paris 7, pp. 39-70.

IREM de Strasbourg, (1979). *Mathématiques 4ème*. París: Istra

IREM de Strasbourg, (1986). *Mathématiques 2ème*. París: Istra.

Kant, E. (1976). *Critique de la raison pure* (trad. J. Barni en 1869). París: G. Baillière.

Laborde, C. (1994). Enseigner la géométrie: permanences et révolutions. *Bulletin APMEP, 396*, 523-548.

Lepoivre, G. y Poirson, A. (1920). *Cours de géométrie théorique et pratique* I. Lille: Janny.

Padilla, V. (1992). L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques. Université Louis Pasteur, Institut de Recherche Mathématique Avancée. Estrasburgo, Francia.

Peirce, C.S. (1978). *Écrits sur le signe* (elección de textos, traducción de G. Deledalle). París: Seuil.

Piaget, J. (1972). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. París: P.U.F.

Poincaré, H. (1963). Pourquoi l'espace a trois dimensions. En *Dernières pensées*. París: Flammarion. Séminaire IUFM (1999). *Conversion et articulation des représentations analogiques* (editado por R. Duval). París: IUFM Nord-Pas-de-Calais.

Este artículo se publicó en 2005 en francés con el título *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement*, en la revista *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *18*(10), pp. 5-53. Se agradece al director de la revista y a la editorial por el permiso de traducir y publicar en esta ocasión.